Aufgaben und Lösungen

2024

www.mathekalender.de

Dieses Buch ist als ein Teil der Schulaktivitäten des Exzellenzclusters MATH+ entstanden.

Berlin Mathematics Research Center

Projektleitung:
Margarita Kostré, Lukas Protz

Mitwirkende von MATH+:
Nadja Wisniewski, Beate Rogler, Martin Skutella, Philipp Gland

Studentische Hilfskräfte:
Jessica Wang, Nikola Sadovek, Katarina Krivokuća

Aufgabenstellende:
Anouk Beursgens, Marieke Heidema, Lukas Protz, Marvin Lücke, Rudolf Straube, Arthur Straube, Tobias Paul, Christian Haase, Sören Nagel, Moritz Grillo, Martin Skutella, Anne Zander, Dante Luber, Filip Blasković, Lukas Abel, Margarita Kostré, Amir Shakouri, Pim van't Hof, Stefano Piceghello, Hajo Broersma, Mathew Maat, Silas Rathke, Yamaan Attwa

Illustrator*innen:
Friederike Hofmann, Julia Nurit Schönnagel, Ivana Martic, Zyana Santuario

Außerdem bedanken wir uns herzlich bei der 4TU.AMI aus den Niederlanden für die Bereitstellung zahlreicher Aufgaben und deren Unterstützung.
Des Weiteren bedanken wir uns bei den Lehrern Axel Gerhardt und Carsten Pfüller von der HU Berlin, die bei der Erstellung der Aufgaben mitgewirkt haben.

Inhaltsverzeichnis

Illustration: Zyanya Santuario

1 Rette Weihnachten!

Autorin: Anouk Beursgens
Projekt: 4TU.AMI

Aufgabe

Es ist fast Zeit, die Weihnachtsgeschenke zu verteilen, aber der Weihnachtsmann ist nirgendwo zu finden! Alle Geschenke sind in einem Safe aufbewahrt, und der Weihnachtsmann scheint der Einzige zu sein, der weiß, wie man den Safe öffnet. Der Safe ist besonders, da er keinen Zahlencode benötigt, sondern sich öffnet, wenn alle Lichter entweder ein- oder ausgeschaltet sind. Die Elfen sind verzweifelt und bitten dich, eine Strategie zu finden, um den Safe zu öffnen. Du bist der Einzige, der Weihnachten retten kann! Du beschließt, den Safe genauer zu untersuchen. An der Außenseite der Tür befindet sich eine große nicht drehbare Scheibe mit vier Lichtschaltern. Jeder Schalter kann entweder in einer „Ein"- oder „Aus"-Position sein. Hinter jedem Schalter befindet sich eine Glühbirne, die je nach Position des Schalters an oder aus ist. Die Glühbirnen befinden sich im Inneren des Safes, sodass du sie nicht sehen kannst. Die Scheibe mit den Glühbirnen im Inneren ist drehbar.

Der Safe öffnet sich, wenn alle Lichter entweder ausgeschaltet oder eingeschaltet sind. Du musst die Schalter an der Safe-Tür benutzen, um den Safe zu öffnen. Bei jedem Versuch kannst du entweder 1 oder 2 Schalter betätigen. Nach jedem Versuch dreht sich die innere Scheibe eine unbekannte Anzahl an (Viertel-) Drehungen (vorausgesetzt, die Tür hat sich nicht geöffnet).

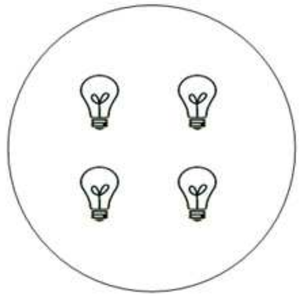


Abbildung 1: Das Innere des Schlosses des Safes.

Es liegt nun an dir, eine Strategie zu entwickeln, die den Safe immer öffnet, unabhängig vom aktuellen Zustand des Schlosses. Gib deine Strategie als eine Abfolge von Aktionen an, die du durchführen musst, um den Safe zu öffnen, wobei die möglichen Aktionen wie folgt genannt werden:

- (1) : Einen Schalter betätigen
- (D) : Zwei diagonal benachbarte Schalter betätigen
- (A) : Zwei jeweils senkrecht bzw. waagerecht benachbarte Schalter betätigen

Wenn der Safe einmal geöffnet ist, indem alle Lichter entweder eingeschaltet oder ausgeschaltet sind, ist das Spiel vorbei und Weihnachten ist gerettet!

Hinweis: Ein möglicher Anfang könnte sein, alle möglichen Zustände aufzuschreiben, in denen sich das Schloss befinden kann. Was passiert, wenn sich die Scheibe mit den Glühbirnen dreht? Gibt es ähnliche Zustände? Überlege dir, wie die gegebenen Aktionen jeden Zustand beeinflussen. Es ist an der Zeit, Weihnachten zu retten!

Bemerkung: Erläuterung zum Verständnis der Schalter: Jeder Schalter hat zwei Positionen. Wird ein Schalter umgekippt, so ändert sich der Zustand der dahinter liegenden Glühbirne unabhängig davon in welcher Position der Schalter sich befand (also egal, ob der Schalter von oben nach unten oder von unten nach oben umgekippt wird.)

Antwortmöglichkeiten:

1. $(1) \to (A) \to (D)$
2. $(D) \to (A) \to (1) \to (D) \to (A)$
3. $(A) \to (D) \to (1) \to (A) \to (D)$
4. $(D) \to (A) \to (A) \to (1) \to (D) \to (A) \to (A)$
5. $(D) \to (A) \to (1)$
6. $(D) \to (A) \to (D) \to (1) \to (D) \to (A) \to (D)$
7. $(1) \to (A) \to (D) \to (1) \to (A) \to (D)$
8. $(A) \to (1) \to (A) \to (D)$
9. $(1) \to (D) \to (A)$
10. $(A) \to (1) \to (A) \to (D) \to (A) \to (1) \to (D)$

Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

Wie vorgeschlagen, beginnen wir damit, alle möglichen Zustände aufzuschreiben. Zunächst könnte man denken, es gäbe $2^4 = 16$ Zustände, da jedes der vier Lichter entweder an oder aus ist. Da sich jedoch die Scheibe mit den Lichtschaltern dreht, ist die einzige bedeutende Information über den Zustand, ob keine Lichter an sind (Safe geöffnet), ein Licht an ist, zwei diagonale Lichter an sind oder zwei jeweils senkrecht bzw. waagerecht benachbarte Lichter an sind. Beachte, dass es äquivalent ist, ob drei Lichter oder ein Licht bzw. vier Lichter oder keine Lichter an sind, da der Safe sich sowohl bei null als auch bei vier eingeschalteten Lichtern öffnet.
Für jeden Zustand des Safes bestimmen wir die Auswirkung der Aktionen (1), (D), (A) und kennzeichnen dies durch einen Pfeil (gerichtete Kante) vom Zustand zum resultierenden Zustand, der mit der Aktion beschriftet ist. Dies ergibt einen gerichteten, beschrifteten Graphen, wie in Abbildung 2 dargestellt.

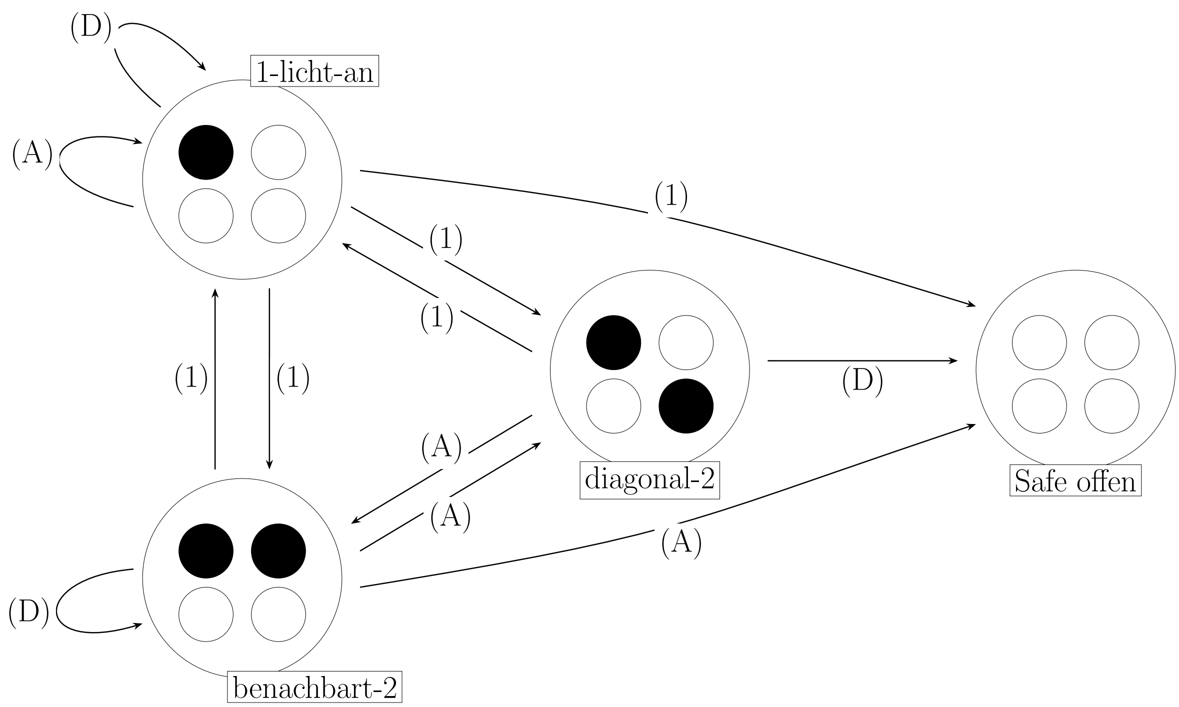


Abbildung 2: Darstellung der Zustände und des Lichtwechsels vom Safe

Die Herausforderung besteht darin, eine Strategie (eine Abfolge von Aktionen) zu finden, die zum Zustand *Safe offen* führt. Wenn wir mit (D) beginnen, wissen wir, dass der Safe sich öffnet (und Weihnachten gerettet ist), wenn wir im Zustand *diagonal-2* sind oder ansonsten der Safe in seinem ursprünglichen Zustand bleibt. Wenn wir dann Aktion (A) ausführen, öffnet sich das Schloss entweder oder es geht in den Zustand *diagonal-2*, wenn der ursprüngliche Zustand *benachbart-2* war, oder es bleibt im ursprünglichen Zustand. Wenn der ursprüngliche Zustand *benachbart-2* war und (A) es in *diagonal-2* überführt hat, müssen wir (D) erneut ausführen, um den Safe zu öffnen. Nach der ersten Ausführung von (D), gefolgt von (A) und dann (D),

sind wir entweder fertig (der Safe ist geöffnet) oder befinden uns (immer noch) im Zustand *1-licht-an*. Wenn wir jetzt (1) ausführen, wissen wir nur, dass wir den Zustand *1-licht-an* verlassen werden. Nun haben wir bereits herausgefunden, dass die Sequenz $(D) \to (A) \to (D)$ den Safe für alle Anfangszustände außer *1-licht-an* öffnet. Daher wird die erneute Ausführung dieser Sequenz garantieren, dass der Safe sich öffnet und Weihnachten gerettet ist!
Es bleibt zu zeigen, dass dies die einzige mögliche Strategie unter den Antwortmöglichkeiten ist, um den Safe zu öffnen. Mit Hilfe von Abbildung 2 können wir alle anderen möglichen Antworten leicht widerlegen. Zum Beispiel können wir $(1) \to (A) \to (D)$ folgendermaßen ausschließen: Wenn der ursprüngliche Zustand *diagonal-2* ist, würde das Schloss in den Zustand *1-licht-an* übergehen, wenn wir Aktion (1) ausführen. Danach würde die Anwendung von (A) und (D) das Schloss im Zustand *1-licht-an* belassen und der Safe bleibt verschlossen. Ebenso können wir alle anderen Antworten ausschließen, mit Ausnahme der Antwort 6.

Illustration: Friederike Hofmann

2 Lass Uns Einpacken!

Autorin: Marieke Heidema (Universität von Groningen)

Aufgabe

In den Tagen vor Weihnachten arbeiten die Elfen des Weihnachtsmanns härter denn je. Geschenkpapier fliegt im Verpackungsraum umher, Klebeband klebt an jeder erdenklichen Oberfläche. Unverpackte Geschenke stapeln sich auf einer Seite des riesigen Verpackungsraums und ragen über alle Elfen hinaus, die hektisch schneiden, kleben, einpacken...

Zwischen den Band-Rollen und Klebeband-Spendern steht ein Wecker auf dem Schreibtisch eines der Elfen. Der Wecker zählt die Stunden herunter, die ihnen noch bleiben, um alle Geschenke einzupacken. Momentan bleiben nur noch 10 Stunden... Und der Stapel der Geschenke? Er enthält 350 Geschenke! Werden die Elfen es rechtzeitig schaffen, alle Geschenke einzupacken?

Es gibt 8 Elfen, die einpacken: Anna, Bea, Candice, Dan und Eddy fangen sofort an. Anna und Candice sind erfahrene Verpackelfen, die jeweils 10 Geschenke pro Stunde einpacken. Bea und Eddy sind etwas langsamer und können nur jeweils 7 Geschenke pro Stunde einpacken, und Dan packt sogar nur 3 Geschenke pro Stunde. Nach 2 Stunden Verpacken kommt Fince, um ihnen zu helfen, aber er kann nur 6 Geschenke pro Stunde einpacken. Als der Wecker nur noch 4 Stunden anzeigt, müssen Candice und Fince gehen. Mit übrigen 2 Stunden auf der Uhr kommen Geoffrey und Hugh, um zu helfen. Sie verpacken 4 (Geoffrey) bzw. 5 Geschenke

(Hugh) pro Stunde. Zur gleichen Zeit geht Bea und Fince kommt zurück.

Wird es noch unverpackte Geschenke geben, wenn die Zeit auf dem Wecker abgelaufen ist?

Antwortmöglichkeiten:

1. Ja, die Elfen haben keine Zeit mehr und es bleiben exakt 50 unverpackte Geschenke!
2. Ja, die Elfen haben keine Zeit mehr und es bleiben exakt 40 unverpackte Geschenke!
3. Ja, die Elfen haben keine Zeit mehr und es bleiben exakt 30 unverpackte Geschenke!
4. Ja, die Elfen haben keine Zeit mehr und es bleiben exakt 20 unverpackte Geschenke!
5. Ja, die Elfen haben keine Zeit mehr und es bleiben exakt 10 unverpackte Geschenke!
6. Nein, die Elfen haben alle Geschenke genau rechtzeitig verpackt!
7. Nein, die Elfen haben alle Geschenke rechtzeitig verpackt und hätten noch 10 weitere Geschenke verpacken können, aber nicht mehr!
8. Nein, die Elfen haben alle Geschenke rechtzeitig verpackt und hätten sogar 20 weitere Geschenke verpacken können, aber nicht mehr!
9. Nein, die Elfen haben alle Geschenke rechtzeitig verpackt und hätten sogar 30 weitere Geschenke verpacken können, aber nicht mehr!
10. Nein, die Elfen haben alle Geschenke rechtzeitig verpackt und hätten sogar 40 weitere Geschenke verpacken können, aber nicht mehr!

Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Um die Gesamtzahl der verpackten Geschenke jedes Elfen zu berechnen, benötigen wir die Rate, mit der sie verpacken, und die Anzahl der Stunden, die sie mit dem Verpacken verbracht haben. Damit können wir die folgende Formel verwenden, um die Gesamtzahl der von diesem Elf verpackten Geschenke zu berechnen:

$$\text{Verpackte Geschenke} \;=\; \text{Verpackungsrate} \;\times\; \text{Verpackstunden}$$

Nachdem die 10 Stunden vorbei sind, hätte jeder Elf folgende Anzahl an Geschenken verpackt:

Anna	$10 \times 10 = 100$
Bea	$7 \times 8 = 56$
Candice	$10 \times 6 = 60$
Dan	$3 \times 10 = 30$
Eddy	$7 \times 10 = 70$
Fince	$6 \times (4 + 2) = 36$
Geoffrey	$4 \times 2 = 8$
Hugh	$5 \times 2 = 10$

Insgesamt bedeutet dies, dass die Elfen in diesen 10 Stunden 370 Geschenke hätten verpacken können. Mit anderen Worten, die 350 Geschenke sind alle verpackt worden und die Elfen hätten sogar 20 weitere Geschenke verpacken können!

Illustration: Ivana Martić

3 Die kreisförmigen Lager der Elfen

Autor: Lukas Protz
Projekt: MATH+

Aufgabe

Aufgrund der Zunahme von Stürmen möchten die Elfen zwei Lagerhäuser mit Förderbändern verbinden. So könnten sie Waren zwischen den Lagern transportieren, ohne nach draußen gehen zu müssen. Von oben betrachtet haben die beiden Lagerhäuser die Form eines Kreises, das erste mit einem Radius von 50 Metern und das zweite mit einem Radius von 70 Metern. Die Mittelpunkte der beiden Gebäude sind genau 200 Meter voneinander entfernt. Die Elfen möchten zwei Förderbänder bauen, die jeweils, wie in Abbildung 3 dargestellt, tangential an den Gebäuden anliegen und genau von einem Gebäude zum anderen verlaufen, aber nicht weiter.

Leider herrscht derzeit ein Sturm, sodass die Elfen die Länge der Förderbänder nicht vor Ort messen können. Sie benötigen aber die richtigen Längen der beiden Förderbänder, um genug Material für den Bau zu bestellen. Können die Elfen die korrekten Längen ohne Messung bestimmen, und wenn ja, wie lang sind die Förderbänder 1 und 2 (gerundet auf ganze Meter)?

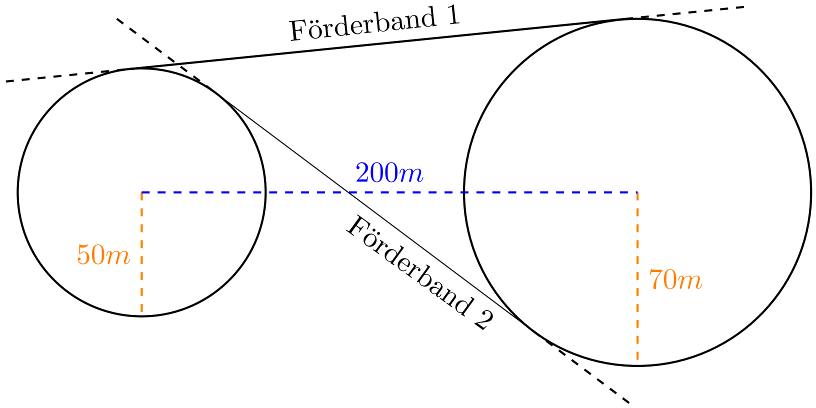


Abbildung 3: Skizze von oben auf die Gebäude mit den eingezeichneten Förderbändern.

Antwortmöglichkeiten:

1. Es ist nicht möglich, die Längen zu bestimmen.
2. Förderband 1: 250 m , Förderband 2: 233 m
3. Förderband 1: 150 m , Förderband 2: 220 m
4. Förderband 1: 161 m , Förderband 2: 233 m
5. Förderband 1: 161 m , Förderband 2: 160 m
6. Förderband 1: 200 m , Förderband 2: 200 m
7. Förderband 1: 201 m , Förderband 2: 233 m
8. Förderband 1: 201 m , Förderband 2: 160 m
9. Förderband 1: 199 m , Förderband 2: 233 m
10. Förderband 1: 199 m , Förderband 2: 160 m

Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Die allgemeine Formel für die Länge l der Tangente, die dem Förderband 1 (siehe Abbildung 3) für die Radien r, r' und den Abstand d zwischen den Mittelpunkten der beiden Kreise entspricht, lautet:

$$l = \sqrt{d^2 - (r - r')^2}.$$

Um diese Formel zu beweisen, drehen wir Abbildung 3 um den Mittelpunkt des linken Kreises, sodass Förderband 1 horizontal liegt (siehe Abbildung 4).

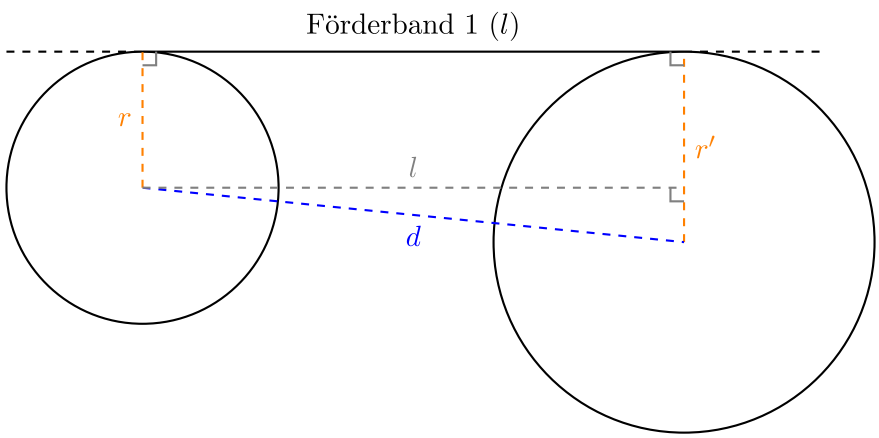


Abbildung 4: Gedrehte Version von Abbildung 3 ohne Förderband 2. Das Dreieck, das von der grauen, blauen und einem Teil der orangefarbenen Linie gebildet wird, ist rechtwinklig.

Da Förderband 1 tangential an beiden Kreisen liegt, ist es senkrecht zu den eingezeichneten Radien r und r'. Durch das parallele Verschieben des Förderband-Segments l nach unten um den Radius r erhält man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten l, $r - r'$ und der Hypotenuse d.

Somit ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras:

$$l^2 + (r - r')^2 = d^2$$

oder umgestellt:

$$l = \sqrt{d^2 - (r - r')^2}.$$

Setzt man die gegebenen Werte ein, ergibt sich:

$$l = \sqrt{200^2 - (50 - 70)^2} = 60 \cdot \sqrt{11} \approx 199.$$

Ähnlich kann man durch Betrachtung von Abbildung 5, die eine gedrehte Version von Abbildung 3 um den Mittelpunkt des ersten Kreises darstellt, ein weiteres rechtwinkliges Dreieck finden. Daraus folgt, dass für die Länge l von Förderband 2 die folgende Formel gilt:

$$l = \sqrt{d^2 - (r + r')^2}.$$

Wiederum ergeben die eingesetzten Werte:

$$l = \sqrt{200^2 - (70 + 50)^2} = 160.$$

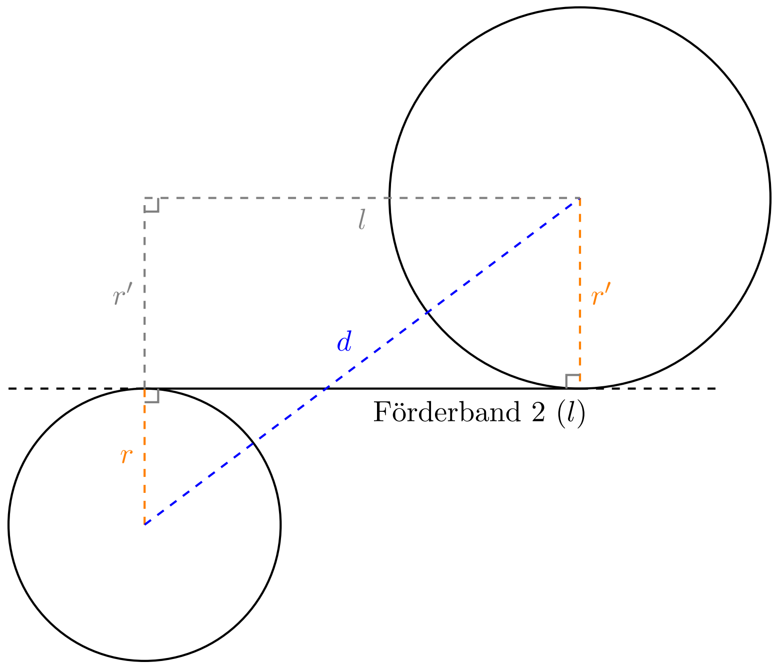


Abbildung 5: Gedrehte Version von Abbildung 3 ohne Förderband 1. Das Dreieck, das von der grauen, blauen und grau-orangenen Linie gebildet wird, ist rechtwinklig.

Die beiden hergeleiteten Formeln sind so ähnlich, dass Geometer*innen sogenannte Kreise mit vorzeichenbehafteten Radien (also Kreise mit positiven und negativen Radien) eingeführt haben, um die beiden Formeln in einer einzigen zusammenzufassen:

Wie wir gesehen haben, gibt es im Wesentlichen zwei Möglichkeiten, eine Tangente zwischen zwei Kreisen zu zeichnen (bis auf Symmetrie). Durch die Einführung von vorzeichenbehafteten Radien kann man den Fall von Förderband 1 abbilden, wenn beide Radien dasselbe Vorzeichen haben, und den Fall von Förderband 2, wenn die Radien unterschiedliche Vorzeichen haben. Somit kann die Länge der Förderbänder immer berechnet werden als:

$$l = \sqrt{d^2 - (r - r')^2}.$$

Tatsächlich können wir für Förderband 1 beide Radien entweder positiv oder negativ wählen und erhalten:

$$l = \sqrt{200^2 - (50 - 70)^2} = \sqrt{200^2 - (-50 - (-70)^2)} \approx 199.$$

Für Förderband 2 kann r positiv und r' negativ oder umgekehrt sein:

$$l = \sqrt{200^2 - (50 - (-70))^2} = \sqrt{200^2 - (-50 - 70)^2} = 160.$$

Es gibt sogar einen ganzen Zweig der Geometrie, die sogenannte Laguerre-Geometrie, die sich mit Transformationen beschäftigt, die Kreise mit vorzeichenbehafteten Radien so abbilden, dass der Tangentialabstand (Länge der Förderbänder) gleich bleibt.

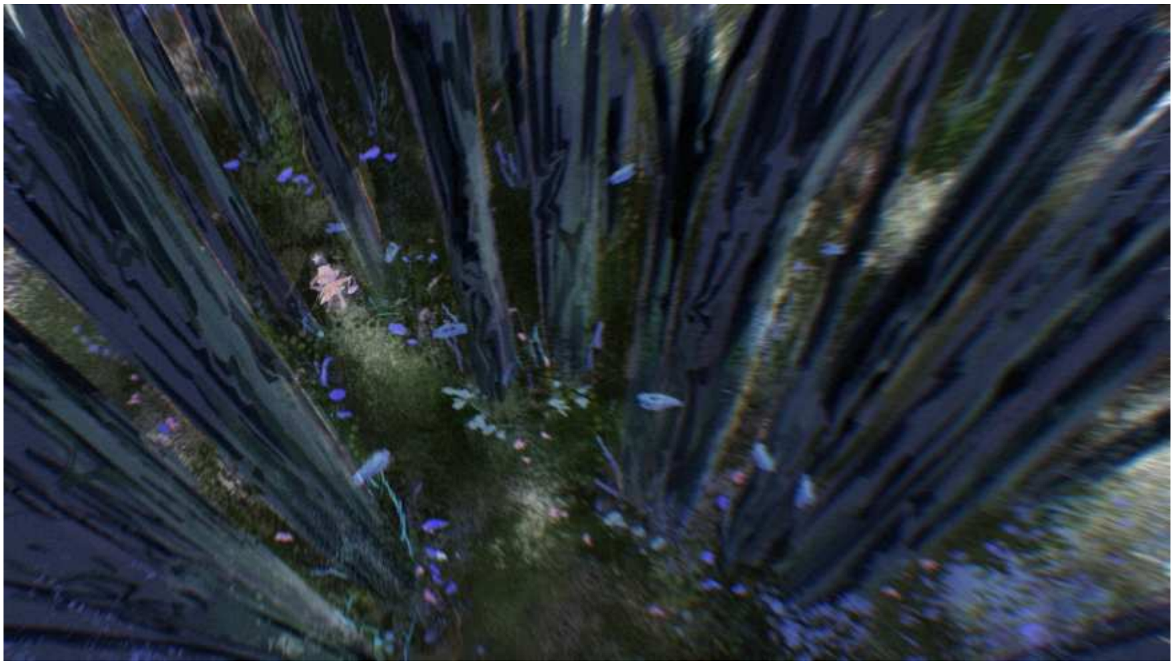


Illustration: Zyanya Santuario

4 Verirrt im magischen Wald

Autor:	Marvin Lücke
Projekt:	EF1-10

Aufgabe

Der Elf Gilfi bricht auf, um im magischen Wald Pilze für ein weihnachtliches Festmahl zu sammeln. Dieser magische Wald hat nicht nur die besten Pilze weit und breit, sondern auch eine ganz besondere Struktur: Am Eingang des Waldes gibt es drei Wege. Nimmt man einen der drei Wege, gelangt man jeweils zu einer Lichtung. Von jeder dieser Lichtungen gehen zwei weitere Wege ab, die jeweils zu zwei neuen Lichtungen führen. Geht man dann weiter, so wiederholt sich dieses Schema immer wieder: jede Lichtung, auf die man gelangt, eröffnet zwei neue Wege zu neuen Lichtungen. Gilfi läuft voller Vorfreude in den magischen Wald und wählt auf jeder Lichtung immer einen der drei möglichen Wege, je mit Wahrscheinlichkeit 1/3 - entweder einen der zwei neuen Wege oder den alten Weg, über den er auf die Lichtung gekommen ist. Nachdem er einige Pilze gesammelt hat, merkt er, dass er sich im magischen Wald verirrt hat! Aber tatsächlich befindet er sich auf einer der drei Lichtungen, die direkt vom Eingang über einen der drei Wege erreichbar sind. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass er von dieser Lichtung aus schließlich den Weg zurück zum Eingang findet, wenn er immer zufällig einen der drei Wege, mit je Wahrscheinlichkeit 1/3 an einer Lichtung wählt?

Hinweis: Eine Möglichkeit zu beginnen ist es sich zu überlegen, wie groß die Wahrscheinlichkeit für eine beliebige Lichtung ist, sich in Richtung Waldeingang bzw. weiter in den Wald hinein zu bewegen.

Antwortmöglichkeiten:

1. 0
2. 1/10
3. 1/6
4. 1/4
5. 1/3
6. 1/2
7. 2/3
8. 3/4
9. 4/5
10. 1

Projektbezug

Viele physikalische, biochemische, aber auch soziale Prozesse werden durch stochastische partikelbasierte Modelle beschrieben. Die vorliegende Aufgabe kann als zufällige Bewegung eines Teilchens auf einem Netzwerk interpretiert werden.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

Sei $P(k)$ die Wahrscheinlichkeit, dass Gilfi irgendwann zum Eingang des Waldes zurück findet, wenn er k Wege vom Eingang entfernt ist. (Das heißt, er müsste k-mal den richtigen Weg wählen, um zum Eingang zu gelangen.) Da er auf einer der drei Lichtungen direkt hinter dem Eingang startet, suchen wir nach der Wahrscheinlichkeit $P(1)$. Für $k > 1$ gilt die folgende Rekursion

$$P(k) = \frac{1}{3}P(k-1) + \frac{2}{3}P(k+1), \tag{1}$$

denn mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ wählt er den richtigen Weg, der ihn um einen Schritt näher zum Eingang bringt, sodass $k-1$ Wege übrig sind. Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ wählt er einen Weg, der die Distanz zum Eingang um einen Schritt erhöht, sodass er noch $k+1$ Wege übrig hat. Setzt man weiter $P(0) := 1$, so gilt die Formel sogar für $k = 1$. Betrachtet man nun die Summe

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} P(k) \\
&= P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + \dots \\
&\overset{(1)}{=} \left(\frac{1}{3}P(0) + \frac{2}{3}P(2)\right) + \left(\frac{1}{3}P(1) + \frac{2}{3}P(3)\right) + \left(\frac{1}{3}P(2) + \frac{2}{3}P(4)\right) + \\
&\quad \left(\frac{1}{3}P(3) + \frac{2}{3}P(5)\right) + \left(\frac{1}{3}P(4) + \frac{2}{3}P(6)\right) + \dots,
\end{aligned}$$

stellt man fest, dass die Wahrscheinlichkeitsterme $P(k)$, für $k > 1$ zwei mal in der Summe auftauchen und sich zu $(\frac{1}{3} + \frac{2}{3})P(k) = P(k)$ aufaddieren. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} P(k) &= \frac{1}{3}P(0) + \frac{1}{3}P(1) + \sum_{k=2}^{\infty} P(k) \\
&= \frac{1}{3}P(0) + \frac{1}{3}P(1) - P(1) + \sum_{k=1}^{\infty} P(k)
\end{aligned}$$

Wenn wir nun die Summe $\sum_{k=1}^{\infty} P(k)$ auf beiden Seiten der Gleichung subtrahieren und $P(0) = 1$ einsetzen, so erhalten wir

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}P(1)$$

und damit $P(1) = \frac{1}{2}$.

Zusatzinfo: Es handelt sich hier um die Rückkehrwahrscheinlichkeit einer Zufallsbewegung auf einem sogenannten Bethe-Gitter, siehe Abb. 6. Der obige Beweis funktioniert analog im allgemeinen Fall, dass jeder Knoten (Lichtung im Wald) den Grad z hat. (In der Aufgabe war $z = 3$, denn zu jeder Lichtung führen drei Wege.) Die Rückkehrwahrscheinlichkeit ist dann $P(1) = \frac{1}{z-1}$.

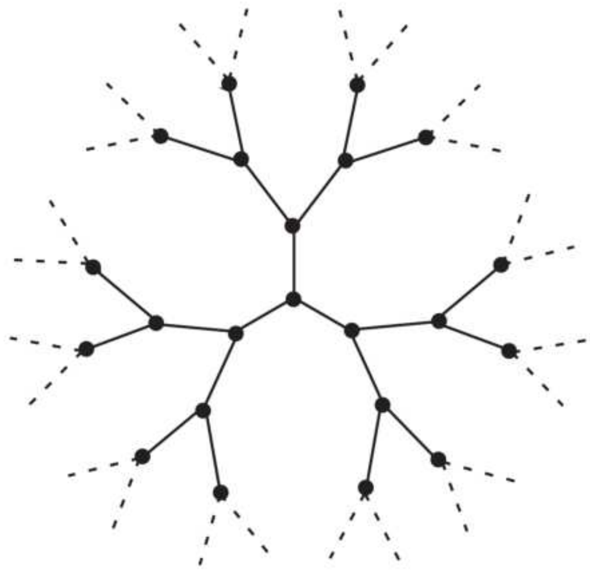


Abbildung 6: Bethe Gitter. (Source: ben-Avraham et al., J. Phys.: Condens. Matter, 2007)

Alternative Lösung

Aus der Rekursionsformel (1) ergibt sich für $k = 1$:

$$P(1) = \frac{1}{3}P(0) + \frac{2}{3}P(2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}P(2).$$

Gleichzeitig wissen wir, dass die Wahrscheinlichkeit, von einer beliebigen Lichtung genau einen Weg näher zum Eingang zu kommen ebenfalls durch $P(1)$ gegeben ist. Daraus folgt:

$$P(2) = P(1)^2,$$

da $P(2)$ auch die Wahrscheinlichkeit ist, dem Eingang zwei Wege bzw. zweimal um einen Weg näher zu kommen. Allgemein gilt sogar:

$$P(n) = P(1)^n.$$

Damit ergibt sich:

$$P(1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}P(1)^2.$$

Das ist eine quadratische Gleichung, die mit der *abc-Formel* oder *p-q-Formel* gelöst werden kann. Die Gleichung lautet in Standardform:

$$\frac{2}{3}P(1)^2 - P(1) + \frac{1}{3} = 0.$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung sind:

$$P(1) = 1 \quad \text{und} \quad P(1) = 0{,}5.$$

Allerdings ist nur eine dieser Lösungen physikalisch sinnvoll: $P(1) = 1$ ist nicht möglich, weil die Wahrscheinlichkeit, von einer Lichtung zurückzukehren kleiner ist als einen der anderen beiden Wege zu nehmen. Daher bleibt nur:

$$P(1) = 0{,}5.$$

Illustration: Ivana Martić

5 Plätzchen mit Glasur überziehen

Autoren: Rudolf Straube (Heinrich-Hertz-Gymnasium Berlin) und
Arthur Straube (ZIB)
Projekt: AA1-18

Aufgabe

Die Wichtel Bob und Sieglinde saßen am Adventstag zusammen und spielten vergnügt Schach. Plötzlich schlug die Uhr und läutete damit ihre Arbeitsschicht in der Weihnachtsfabrik ein. Ihre Aufgabe in der Weihnachtsfabrik ist es Plätzchen, bestehend aus 10 quadratischen Feldern, der rechteckigen Formen 1×10 und 2×5 mit Glasur zu überziehen, siehe Abbildung 7.

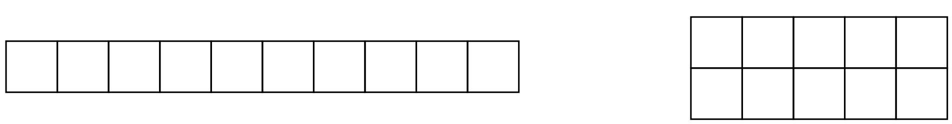


Abbildung 7: Die Plätzchen der Formen 1×10 (links) und 2×5 (rechts).

Damit die Plätzchen in ihrer Dekoration aber einzigartig bleiben, bestücken Bob und Sieglinde Teilplätzchen mit Glasur nach dem "Weihnachtsschachprinzip". Wie Schachkönige, die die bis zu acht Felder um sich herum auf einem Schachbrett schlagen können, tragen sie die Glasur nur so auf die Teilplätzchen auf, dass sich keine zwei mit Glasur bedeckten Felder mit einer Kante oder Ecke berühren. Gleichzeitig darf aber keinesfalls noch Platz für ein weiteres Glasurfeld auf dem ganzen Plätzchen bleiben. Optimierung spielt dabei keine Rolle. Es ist also gut möglich, dass in einer Anordnung mehr und in einer anderen weniger Glasurfelder auf das ganze rechteckige Plätzchen gepasst hätten.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Plätzchen der Formen 1×10 und 2×5 mit Glasur zu überziehen? Die Antwort ist in Zahlenpaaren (M, N) anzugeben, wobei M für die Form 1×10 und N für die Form 2×5 steht.

Hinweis: Betrachte nur die Endkonfigurationen. Insbesondere gelten auch Konfigurationen, die durch Drehungen ineinander überführt werden können, als verschieden.

Antwortmöglichkeiten:

1. $(9, 12)$
2. $(12, 12)$
3. $(12, 16)$
4. $(12, 20)$
5. $(12, 24)$
6. $(12, 36)$
7. $(16, 16)$
8. $(16, 20)$
9. $(16, 24)$
10. $(16, 36)$

Projektbezug:

Inhaltlich befasst sich das Math$^+$ Projekt mit biochemischen Oszillatoren. Insbesondere die charakteristischen intrazellulären Bedingungen implizieren, dass chemische Reaktionen in sehr kleinen Volumina ablaufen. Auf diesen mikroskopischen Skalen wird die diskrete Natur der reagierenden Komponenten entscheidend. Das bedeutet, dass die ablaufenden biochemischen Prozesse inhärent stochastisch sind und klassische makroskopische Modelle der Reaktionskinetik oft nicht anwendbar sind. Die vorgeschlagene Aufgabe, Konfigurationsmöglichkeiten zu zählen, ist ein einfaches Beispiel, das direkt an den Bereich der Stochastik und Wahrscheinlichkeitsrechnung grenzt. Die Aufgabe zeigt, dass selbst in relativ einfachen Situationen eine direkte Zählung von Möglichkeiten schwierig sein kann. Durch geschickten Einsatz mathematischer Methoden kann der Aufwand jedoch erheblich reduziert werden und es können allgemeinere Lösungen gefunden werden.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

1. Direktes Abzählen.

Der offensichtliche Weg ist, alle unterschiedlichen Konfigurationen direkt zu betrachten und abzuzählen. Alle möglichen Konfigurationen sind in den Abbildungen 8 und 9 dargestellt.

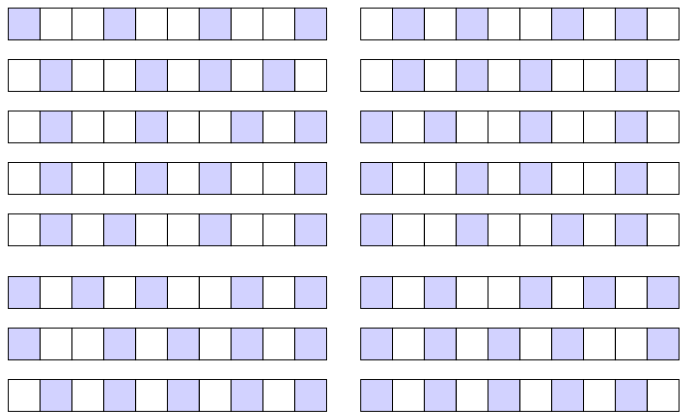


Abbildung 8: Alle 16 Konfigurationen für Plätzchen der Form 1×10.

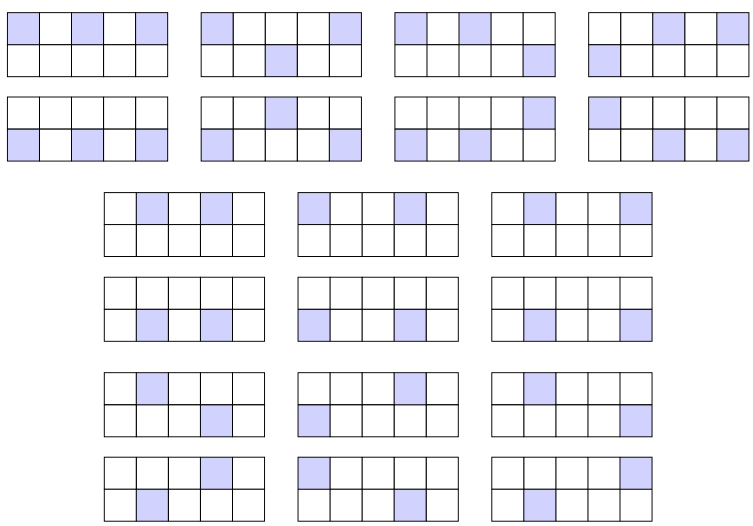


Abbildung 9: Alle 20 Konfigurationen für Plätzchen der Form 2×5.

Für relativ kleine Plätzchen funktioniert dieses Verfahren einwandfrei. Für größere Plätzchen wird es aber ganz schnell aufwendig. Dies ist genau die Situation, in der die Macht der Mathematik es ermöglicht, eine wesentlich elegantere und effizientere Lösung zu finden.

2. Rekursionsformel.

Betrachten wir die etwas schwerere Konfiguration $2 \times n$. Sei N_n die Zahl unabhängiger Möglichkeiten Plätzchen der Größe $2 \times n$ mit Glasur zu überziehen. Beginnen wir die Betrachtung von links. Das Plätzchen wird schrittweise von links nach rechts gemäß den gegebenen Regeln überzogen. Zu Beginn haben wir 4 Möglichkeiten eines der vier grün markierten Felder (siehe Abbildung 10) mit Glasur zu bedecken. Unter der Betrachtung der vier Varianten kann man im Folgenden die Aufgabe auf ein Plätzchen zurückführen, das dem Ausgangsplätzchen gleicht, aber etwas kürzer ist, siehe Abbildung 10. Blau sind die Felder markiert, die mit Glasur überzogen sind und rot die Felder, die dadurch blockiert sind. Im Endeffekt lässt sich die Konfiguration N_n entweder auf zwei Varianten, bei denen Kästchen in der ersten Spalte bedeckt sind (10, unten links), oder auf zwei Varianten, bei denen Kästchen in der zweiten Spalte bedeckt sind (10, unten rechts), zurückführen. Entsprechend ergibt das für die Zahl der Varianten im ersten Fall $2N_{n-2}$, und im zweiten $2N_{n-3}$.

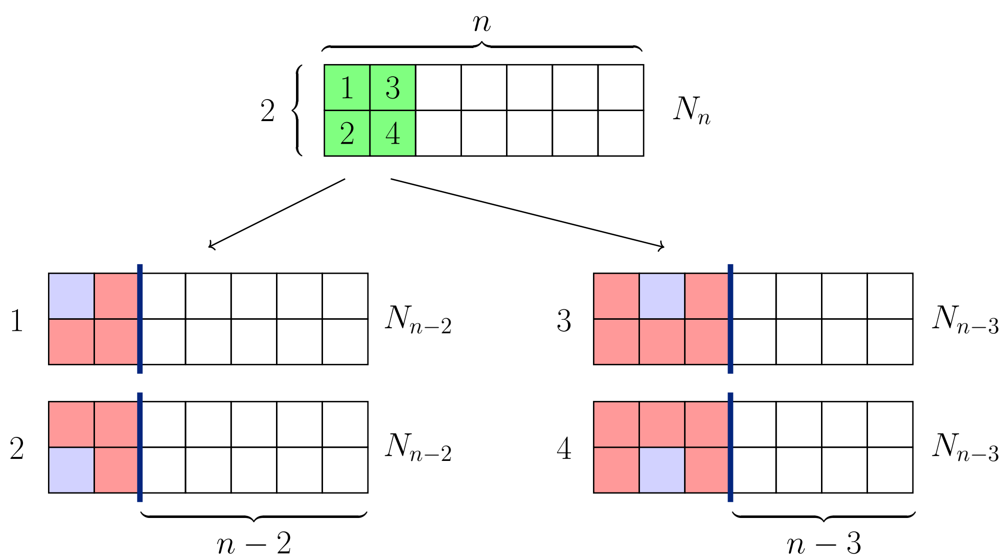


Abbildung 10: Es gibt 4 Möglichkeiten ein Plätzchen der Form $2 \times n$ (oben) auf kleinere Plätzchen der Form $2 \times (n-2)$ (unten links) und $2 \times (n-3)$ (unten rechts) zu reduzieren.

Fasst man die Ergebnisse zusammen, so erhält man eine Rekursionsformel der Form:

$$N_n = 2(N_{n-2} + N_{n-3}) \quad (n \geq 4)\,. \tag{2}$$

Um sie anwenden zu können benötigt man außerdem die Startwerte N_1, N_2 und N_3. Das ist durch die direkte Rechnung der Varianten (Abbildung 11), recht leicht zu machen, was auf die Werte $N_1 = 2$, $N_2 = 4$ und $N_3 = 6$ hinausführt.
Unter Verwendung dieser Startwerte und der Formel (2), findet man schrittweise $N_4 = 12$, $N_5 = 20$, $N_6 = 36$ usw. In der gegebenen Aufgabe interessiert uns $N_5 = 20$, was sich gut mit den Ergebnissen der direkten Abzählung vereinbart.

Für die Anzahl M_n der Möglichkeiten die Plätzchen der Form 1×10 mit Glasur zu überziehen geht die Herleitung ähnlich. Hier bekommt man die Rekursionsformel

$$M_n = M_{n-2} + M_{n-3} \quad (n \geq 4) \tag{3}$$

mit den Anfangswerten $M_1 = 1$, $M_2 = 2$, $M_3 = 2$. Daraus folgt: $M_4 = 3$, $M_5 = 4$, …, $M_9 = 12$, $M_{10} = 16$, $M_{11} = 21$, u.s.w. Die in der Aufgabe gefragte Zahl ist $M_{10} = 16$.

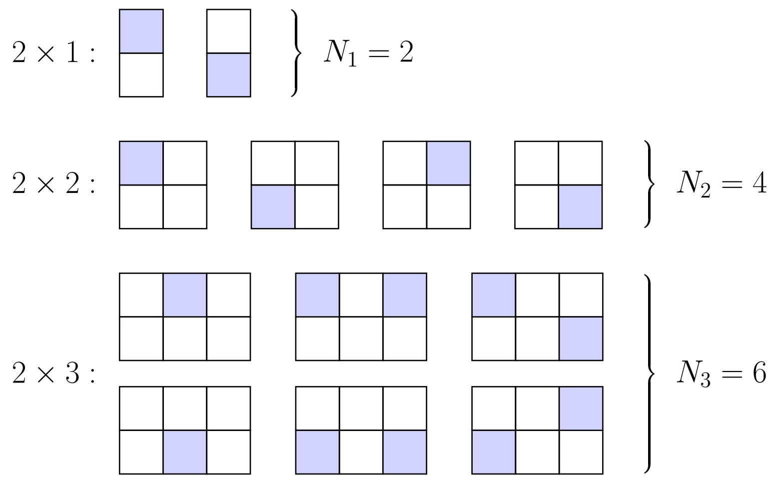


Abbildung 11: Illustration der Konfigurationen für die Anfangsbedingungen: $N_1 = 2$, $N_2 = 4$, $N_3 = 6$.

Illustration: Zyanya Santuario

6 Werkbank-Gewusel

Autor: Tobias Paul (HU Berlin)
Projekt: AA3-18

Aufgabe

Um die Weihnachtsgeschenke angemessen zu verpacken, hat der Weihnachtsmann in diesem Jahr Geschenkpapier in den Farben Rot und Blau besorgt. An einer Werkbank sitzen insgesamt 500 Weihnachtswichtel mit ihren einzupackenden Geschenken paarweise gegenüber (also 250 auf jeder Seite). Dabei gehen die Wichtel folgendermaßen vor:

- Jeder Wichtel packt sein Geschenk zeitgleich mit dem gegenüber sitzenden Wichtel ein.
- Das Wichtelpaar am Anfang der Werkbank packt seine Geschenke zuerst ein. Jeder Wichtel entscheidet dabei selbst, ob er rotes oder blaues Geschenkpapier nutzt.
- Danach packt das nächste Paar aus gegenüber sitzenden Wichteln seine Geschenke ein, danach das dritte Paar und so weiter. Das paarweise Einpacken beginnt also an einem Ende der Werkbank und setzt sich nach und nach bis zum anderen Ende fort.

An Tag 1 sieht jeder Wichtel aus dem Augenwinkel die Verpackung des vorhergehenden Wichtel auf der gegenüberliegenden Seite und entscheidet sich, exakt die gleiche Farbe für das Geschenkpapier zu verwenden.
Das erste Paar entscheidet sich dabei vollkommen unabhängig von einander mit jeweils einer Wahrscheinlichkeit von 1/2 für eine der beiden Farben.

An Tag 2 sieht jeder Wichtel aus dem Augenwinkel die Verpackungen der vorhergehenden 2 Wichtel auf der gegenüberliegenden Seite. Haben die beiden Verpackungen die gleiche Farbe, so wird er sich auch für diese Farbe entscheiden. Sieht er aber unterschiedliche Farben, so entscheidet er sich vollkommen unabhängig mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/2 für eine der beiden Farben. Die ersten 2 Paare am Anfang des Tisches entscheiden sich dabei vollkommen unabhängig von einander mit jeweils einer Wahrscheinlichkeit von 1/2 für die Farbe ihrers Geschenkpapiers.

Kurz vor Weihnachten stellt sich dem Weihnachtsmann nun folgende Fragen: Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwenden beide Wichtel des letzten Wichtelpaares (Wichtelpaar Nummer 250) am Tisch die gleiche Farbe für ihr Geschenkpapier (a) an Tag 1 bzw. (b) an Tag 2? Aufgepasst, der Weihnachtsmann hat die Antwortmöglichkeiten auf die 2. Nachkommastelle gerundet.
Hinweis: Für Tag 2 könnte es hilfreich sein, sich die Möglichkeiten für die ersten z.B. fünf Paare zu überlegen.

Antwortmöglichkeiten:

1. (a): 1 (b): 1
2. (a): 1 (b): 0.5
3. (a): 1 (b): 0
4. (a): 0.5 (b): 1
5. (a): 0.5 (b): 0.5
6. (a): 0.5 (b): 0.33
7. (a): 0.5 (b): 0
8. (a): 0 (b): 1
9. (a): 0 (b): 0.5
10. (a): 0 (b): 0.33

Projektbezug:

In der Spieltheorie gibt es einen sogenannten “adaptive play” Prozess. Im konkreten Fall des Koordinationsspiels mit zwei Spielern und zwei Optionen (in dem beide Spieler übereinstimmen wollen, also die gleiche Option wählen wollen) tut dieser Prozess Folgendes: Um die Entscheidung für die nächste Spielrunde zu fällen, darf jeder Spieler sich eine Anzahl $s \geq 1$ der gegnerischen Spielzüge aus den letzten h Spielrunden anschauen. In der Aufgabe entspricht das $s = 1$ und $h \in \{1, 2\}$. Die beste Antwort auf das gesehene ist in diesem Spiel dann, den Spielzug zu kopieren (weil die Spieler übereinstimmen wollen).

In dem Projekt wollen wir Varianten dieses Prozesses mit Methoden aus der Populationsgenetik untersuchen und dadurch mögliche Aussagen über z.B. Häufigkeiten von Spielzügen im Verlauf der Zeit zu treffen.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 4.

Wir lösen die Aufgabe mit einfacher Kombinatorik. An Tag 1 benutzt das erste Wichtelpaar das gleiche Geschenkpapier mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/2, weil beide Wichtel mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1/2) \cdot (1/2) = 1/4$ rot und genauso mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1/2) \cdot (1/2) = 1/4$ blau benutzen.
Das zweite Paar wählt die Farbe genauso wie das erste Paar, weswegen auch hier mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/2 das gleiche Papier benutzt wird. Dieses Argument kann man iterativ anwenden und sehen, dass das letzte Wichtelpaar mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/2 das gleiche Geschenkpapier verwendet.

An Tag 2 ist es etwas trickreicher. Zunächst stellen wir fest, dass ab dem Moment wo zwei Wichtelpaare nebeneinander das gleiche Papier verwenden, alle darauf folgenden Wichtel auch das selbe Papier verwenden werden. In der Mathematik spricht man in dem Fall von einem *Equilibrium*. Die vier Wichtel der ersten zwei Paare wählen ihre Verpackungen komplett unabhängig voneinander, weshalb es $2^4 = 16$ mögliche Kombinationen gibt. Davon sind exakt 2 so, dass alle vier Wichtel das gleiche Geschenkpapier verwenden. Es gibt also eine Wahrscheinlichkeit von $14/16 = 7/8$, dass diese vier nicht übereinstimmen. Schauen wir uns nun an, wie genau das Geschenkpapier des dritten Paares aussehen könnte. Dafür unterteilen wir die Geschenkverpackung der ersten zwei Wichtelpaare in zwei Kategorien:

Fall 1: Es gibt eine Farbe, die auf beiden Seiten des Tisches auftritt, (siehe Abbildung 12). Dies tritt auf, 1. - wenn das Geschenkpapier von einem Paar in seinen Farben übereinstimmt, und vom anderen Paar nicht, 2. - wenn das Geschenkpapier von beiden Paaren jeweils übereinstimmt, aber das erste Paar eine andere Farbe vom Geschenkpapier hat, als das zweite Paar und 3. - wenn das Geschenkpapier beider Paare nicht übereinstimmt, aber sich die Farben auf der jeweiligen Seite nicht wiederholen . In Falle von 1. hat mit einer Wahrscheinlichkeit von genau 1/2 das dritte Paar

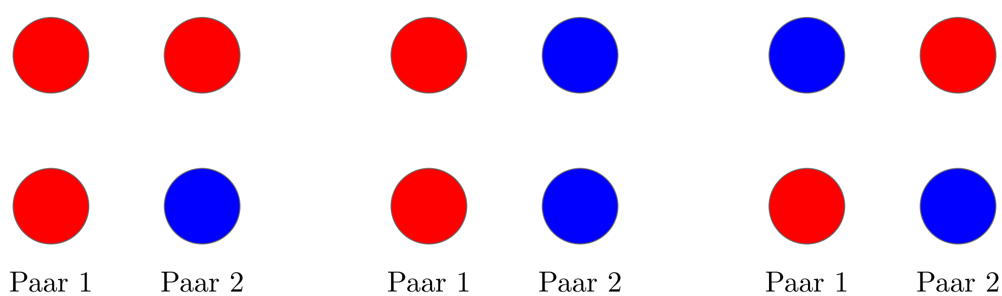


Abbildung 12: Die drei Möglichkeiten (zusammen mit getauschten Rollen für rot und blau) für Fall 1.

übereinstimmendes Papier und das vierte Paar hat eine Wahrscheinlichkeit von mindestens 1/4 die Farben des dritten Wichtelpaares zu übernehmen (nämlich mindestens in den Fällen, bei denen sich beide Wichtel die Farbe vom 3. Wichtelpaar abgucken). Somit wird das Equilibrium bei Wichtelpaar 3 und 4 mit mindestens einer Wahrscheinlichkeit

von 1/8 erreicht.
In Falle von 2. und 3., kann man genau so zeigen, dass das Equilibrium bei Wichtelpaar 3 und 4 mit mindestens einer Wahrscheinlichkeit von 1/8 erreicht wird. In jedem Fall hätte das Geschenkpapier vom vierten Wichtelpaar mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 1/8 genau dieselbe Farbe wie das vom dritten Wichtelpaar. Daraus folgt, dass die Wahrscheinlichkeit für unterschiedliche Farben unter den Geschenken des dritten und vierten Paares höchstens 7/8 ist. Insbesondere haben auch das vierte und fünfte Paar eine Wahrscheinlichkeit von höchstens 7/8 auf unterschiedliche Farben bei der Geschenkpapierverpackung. Denn mit mindestens Wahrscheinlichkeit 1/8 haben Paar 3 und 4 alle gleichfarbiges Geschenkpapier und somit dann auch Paar 5.

Fall 2: Die Farben auf beiden Seiten der Werkbank sind unterschiedlich, aber auf der jeweiligen Seite sind die Farben des ersten und zweiten Wichtels gleich. Dann werden aber die Verpackungsfarben des zweiten und dritten Wichtelpaares eine Konfiguration aus Fall 1 abbilden. (siehe Abb. 13)

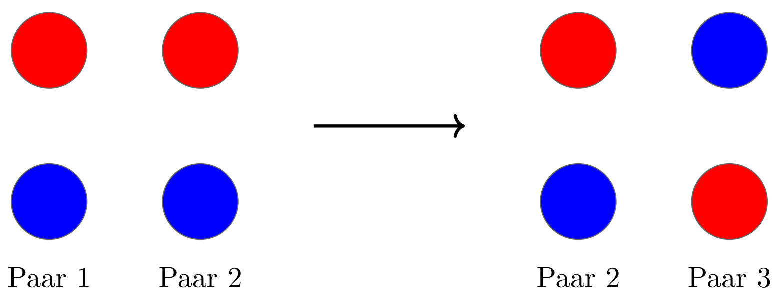


Abbildung 13: Die Ausgangskonfiguration in Fall 2 und die Konfiguration für die Paare 2 und 3 (von denen Paar 4 seine Verpackungen wählen kann).

In beiden Fällen folgt, dass die Wichtelpaare an den Stellen 4 und 5 maximal mit Wahrscheinlichkeit $(7/8) \cdot (7/8)$ unterschiedliches Geschenkpapier verwenden. Betrachtet man nun Paar 4 und 5 als neue Anfangspaare, so sieht man, dass das Argument dann auf die Paare 7 und 8 angewendet werden kann, d.h. dass höchstens in 7/8 aller Fälle in denen Paar 4 und 5 nicht alle das gleiche Geschenkpapier haben auch Paare 7 und 8 nicht alle das gleiche Geschenkpapier haben. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Paare 7 und 8 nicht alle das gleiche Geschenkpapier haben ist somit höchstens $(7/8)^3$. Generell lässt sich auf diese Weise für Paare den Stellen der Form $3k+1,\ 3k+2$ mit einer natürlichen Zahl k die maximale Wahrscheinlichkeit berechnen, dass in jeweils diesen zwei Paaren nicht alle Wichtel das gleiche Geschenkpapier verwenden. Sie beträgt $(7/8)^{k+1}$. Die Paare an den Stellen $247 = 3 \cdot 82 + 1$ und $248 = 3 \cdot 82 + 2$ haben also höchstens die Wahrscheinlichkeit $(7/8)^{83} \approx 0$. Ebenso kann damit auch Paar 250 höchstens die Wahrscheinlichkeit $(7/8)^{83}$ für unterschiedliche Farben des Geschenkpapiers haben. Also benutzt das letzte Paar mit gerundeter Wahrscheinlichkeit 1 das gleiche Papier.

Illustration: Friederike Hofmann

7 Santa Cargo

Autor: Lukas Abel

Aufgabe

Die Firma Santa Cargo ist dafür verantwortlich, alle Geschenke zu transportieren. Natürlich möchte Santa Cargo den Aufwand minimieren, um alle Geschenke rechtzeitig und optimal zu liefern. Kannst du der Firma dabei helfen?

Für die nächste Lieferung muss Santa Cargo $N = 10$ Geschenke verschicken. Traditionell werden Schlitten verwendet, um die Fracht zu transportieren. Ein Schlitten verursacht immer einen anfänglichen Aufwand von einem Wichtel-Watt (die Standard-Maßeinheit für Aufwand am Nordpol). Darüber hinaus entsteht ein zusätzlicher Aufwand, der von der Anzahl der Geschenke abhängt.

Ein Schlitten kann bis zu 10 Geschenke tragen, ist jedoch am besten ausbalanciert, wenn er drei Geschenke transportiert. Abhängig von der Anzahl der Geschenke n wird der Aufwand durch $(n-3)^2$ Wichtel-Watt berechnet. Das bedeutet, dass ein Schlitten, der nur ein Geschenk trägt, mehr Aufwand verursacht als ein Schlitten mit drei Geschenken. Der Grund dafür ist, dass Santa Cargo unterbeladene oder gar leere Schlitten vermeiden möchte. Der Aufwand für einen einzelnen Schlitten, der n Geschenke transportiert, wird also wie folgt berechnet:

$$e(n) := 1 + (n-3)^2.$$

Wie viele Schlitten sollte Santa Cargo beladen und wie sollten die Geschenke aufgeteilt werden, um die zehn Geschenke mit minimalem Aufwand zu verschicken?

Eine mögliche Antwort sollte die Form $(n_1, ..., n_k)$ haben, wobei k die Anzahl der Schlitten ist und n_i die Anzahl der Geschenke auf Schlitten i. Zum Beispiel hat die Antwort (10) einen Schlitten, der alle Geschenke trägt, während die Antwort $(2, 5, 3)$ drei Schlitten hat: Der erste Schlitten trägt zwei Geschenke, der zweite fünf und der dritte drei Geschenke. Dabei ist zu beachten, dass ein Geschenk nicht in mehrere Teile zerlegt werden kann.

Antwortmöglichkeiten:

1. (10)
2. $(10, 0)$
3. $(5, 4, 3)$
4. $(2, 3, 2, 3)$
5. $(2, 2, 2, 2, 2)$
6. $(7, 3)$
7. $(4, 4, 2)$
8. $(1, 2, 3, 4)$
9. $(5, 5)$
10. Keine der gegebenen. Die richtige Antwort lautet...

Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Da Schlitten, die genau drei Geschenke transportieren, den geringsten Aufwand verursachen, beabsichtigen wir, drei Schlitten wie folgt zu verwenden: zwei mit jeweils drei Geschenken und einen mit vier. Diese Konfiguration ergibt einen Gesamtaufwand von:

$$2e(3) + e(4) = 2 + 2 = 4.$$

Nun zeigen wir, dass dies die optimale Lösung ist, indem wir den Aufwand für verschiedene Konfigurationen mit k Schlitten, die jeweils drei Geschenke tragen, berechnen. Zunächst stellen wir fest, dass jeder Schlitten, der weniger oder mehr als drei Geschenke trägt, einen Aufwand von mindestens 2 Wichtel-Watt verursacht.

Fall 1: $k = 0$: Hier verwenden wir keinen Schlitten mit drei Geschenken. Um die 4 Wichtel-Watt nicht zu überschreiten, können höchstens zwei Schlitten verwendet werden, da jeder Schlitten einen Aufwand von mindestens 2 Wichtel-Watt oder mehr verursacht. Folglich müsste mindestens ein Schlitten fünf oder mehr Geschenke tragen, was zu einem minimalen Aufwand von

$$e(5) = 1 + (5 - 3)^2 = 5$$

führt. Die Verwendung von keinem Schlitten mit genau drei Geschenken führt daher zu einem Gesamtaufwand von mehr als 4 Wichtel-Watt. Daher muss in einer optimalen Lösung mindestens ein Schlitten genau drei Geschenke tragen.

Fall 2: $k = 1$: Wenn ein Schlitten drei Geschenke trägt, was einen Aufwand von einem Wichtel-Watt verursacht, dann kann nur noch ein weiterer Schlitten verwendet werden, ohne das 4 Wichtel-Watt Limit zu überschreiten. Dieser zweite Schlitten müsste sieben Geschenke tragen, um alle zehn Geschenke zu transportieren:

$$e(7) = 1 + (7 - 3)^2 = 17.$$

Dies überschreitet bei weitem das Limit von 4 Wichtel-Watt. Daher müssen in einer optimalen Lösung mindestens zwei Schlitten drei Geschenke tragen.

Fall 3: $k \geq 2$: Damit der Gesamtaufwand bei 4 Wichtel-Watt oder weniger bleibt, sind die einzigen realisierbaren Konfigurationen:

- Ein zusätzlicher Schlitten mit drei Geschenken (für insgesamt neun Geschenke),
- Zwei zusätzliche Schlitten, die jeweils drei Geschenke tragen (für insgesamt zwölf Geschenke), oder
- Ein zusätzlicher Schlitten mit vier Geschenken (für insgesamt zehn Geschenke).

Die ersten beiden Optionen führen zu entweder neun oder zwölf Geschenken, was mit der Anforderung, genau zehn Geschenke zu transportieren, unvereinbar ist. Die einzige mögliche Konfiguration ist daher $(3, 3, 4)$, die somit optimal ist.

Alternative & Allgemeine Lösung (unter Verwendung von Ableitungen)

Ein einzelner Schlitten, der n Geschenke trägt, verursacht den Aufwand

$$e(n) \coloneqq 1 + (n-3)^2.$$

Hier steht die 1 für den anfänglichen Aufwand und $(n-3)^2$ für den zusätzlichen Aufwand, der von der Anzahl der Geschenke n abhängt. Die Summe aller Aufwände ergibt den Gesamtaufwand:

$$E(n_1, ..., n_k) \coloneqq \sum_{i=1}^{k} e(n_i) = \sum_{i=1}^{k} \left[1 + (n_i - 3)^2\right].$$

Nun möchten wir den Aufwand minimieren, wobei wir insgesamt $N = 10$ Geschenke transportieren:

$$\min_{\sum_{i=1}^{k} n_i = N} E(n_1, ..., n_k).$$

Dies ist ein Beispiel für konkurrierende Energien/Aufwände. Um den Aufwand zu minimieren, muss die Anzahl der Schlitten minimiert werden. Doch das erhöht den Aufwand für den einzelnen Schlitten.

Auf der anderen Seite könnte man den Aufwand für einen Schlitten minimieren (indem man immer drei Geschenke auf einen Schlitten lädt), aber das erhöht die Anzahl der Schlitten.

Um den minimalen Aufwand zu finden, müssen diese beiden konkurrierenden Mechanismen sorgfältig ausbalanciert werden.

Für die gegebenen Lösungen können wir den jeweiligen Aufwand von Hand berechnen:

1. $E(10) = 1 + (10-3)^2 = 50$
2. $E(10, 0) = 1 + (10-3)^2 + 1 + (0-3)^2 = 60$
3. $E(5, 4, 3) = 1 + (5-3)^2 + 1 + (4-3)^2 + 1 + (3-3)^2 = 8$
4. $E(2, 3, 4, 3) = 1 + (2-3)^2 + 1 + (3-3)^2 + 1 + (4-3)^2 + 1 + (3-3)^2 = 6$
5. $E(2, 2, 2, 2, 2) = 5 \cdot (1 + (3-2)^2) = 10$
6. $E(7, 3) = 18$
7. $E(4, 4, 2) = 6$
8. $E(1, 2, 3, 4) = 10$
9. $E(5, 5) = 10$

Bisher hat Antwort 7 den geringsten Aufwand der gegebenen Möglichkeiten. Aber gibt es eine bessere Lösung?

Zunächst stellen wir fest, dass, wenn wir nur einen Schlitten verwenden wollen, nicht viel zu tun ist, da es nur eine Möglichkeit gibt, den Schlitten zu beladen: Alle zehn Geschenke auf den Schlitten legen, was einen Aufwand von

$$E(10) = 1 + (10 - 3)^2 = 50.$$

Aber was, wenn wir zwei Schlitten verwenden wollen? Wenn wir den Schlitten mit (n_1, n_2) beladen, erhalten wir

$$E(n_1, n_2) = 1 + (n_1 - 3)^2 + 1 + (n_2 - 3)^2.$$

Wenn wir zusätzlich die Nebenbedingung $n_1 + n_2 = N$ benutzen, wobei N die Anzahl der zu transportierenden Geschenke bezeichnet (in unserem konkreten Fall $N = 10$), erhalten wir

$$E(n_1) = 1 + (n_1 - 3)^2 + 1 + (N - n_1 - 3)^2.$$

Wenn dies minimal ist, muss die Ableitung nach n_1 null sein. Daher können wir die Ableitung nach n_1 berechnen:

$$E'(n_1) = 2(n_1 - 3) - 2(N - n_1 - 3) \stackrel{!}{=} 0$$

Umgestellt ergibt sich

$$n_1 = \frac{N}{2}$$

und somit folgt mit der Nebenbedingung auch $n_2 = \frac{N}{2}$. Das bedeutet, dass wir die Schlitten gleichmäßig beladen sollten, wenn wir nur zwei Schlitten verwenden. Vergleiche zum Beispiel die berechneten Aufwände:

2. $E(10, 0) = 60$
6. $E(7, 3) = 18$
10. $E(5, 5) = 10$

Auch wenn wir einen Schlitten in $E(7, 3)$ perfekt beladen haben, verursacht es viel mehr Aufwand als das gleichmäßige Beladen beider Schlitten in $E(5, 5)$.

Die Vermutung liegt nahe, das auch bei der Verwendung von allgemein k Schlitten eine gleichmäßige Verteilung am besten ist. Dies werden wir im folgenden beweisen: Seien also $n_1, \ldots, n_k$ die Anzahl der Geschenke auf den k Schlitten. Dann ist

$$E(n_1, \ldots, n_k) = \sum_{i=1}^{k} \left[1 + (n_i - 3)^2\right].$$

Mit der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^{k} n_i = N$ lässt sich die Variable n_k aus der Gleichung für E eliminieren und wir erhalten

$$E(n_1, \ldots, n_{n_{k-1}}) = \sum_{i=1}^{k-1} \left[1 + (n_i - 3)^2\right] + 1 + \left(N - \sum_{i=1}^{k-1} n_i - 3\right)^2.$$

Damit E minimal wird, müssen alle Ableitungen in jeweils die Richtung n_i null sein:

$$\partial_{n_i} E(n_1, \ldots, n_{k-1}) \stackrel{!}{=} 0$$

für $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Hierbei steht ∂_{n_i} für die Ableitung nach der Variable n_i. Wir erhalten die Gleichungen:

$$\partial_{n_i} E(n_1, \ldots, n_{k-1}) = 2(n_i - 3) - 2\left(N - \sum_{i=1}^{k-1} n_i - 3\right) \stackrel{!}{=} 0.$$

Nun betrachten wir zwei der obigen Gleichungen zu zwei beliebigen Indizes l und m:

$$\begin{aligned} 2(n_l - 3) - 2\left(N - \sum_{i=1}^{k-1} n_i - 3\right) &\stackrel{!}{=} 0, \\ 2(n_m - 3) - 2\left(N - \sum_{i=1}^{k-1} n_i - 3\right) &\stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Subtraktion der beiden Gleichungen führt zu

$$2(n_l - 3) - 2(n_m - 3) = 0,$$

oder äquivalent

$$n_l = n_m.$$

Da l und m beliebig waren, können wir schlussfolgern:

Alle Schlitten sollten gleichmäßig beladen werden.

Es bleibt zu zeigen, dass die gefunden Werte $n_1 = \frac{N}{k}, \ldots, n_k = \frac{N}{k}$ wirklich ein Minimum von E sind. Betrachte dazu Zahlen $\delta_1, \ldots, \delta_k$, die als Abweichungen für die Anzahl der Geschenke $n_1, \ldots, n_k$ von $\frac{N}{k}$ dienen. Mithilfe der Nebenbedingung folgt $\delta_k = \frac{N}{k} - \sum_{i=1}^{k-1} \delta_i$. Unter der Verwendung der binomischen Formeln erhalten wir somit

$$\begin{aligned} E\left(\frac{N}{k} + \delta_1, \ldots, \frac{N}{k} + \delta_{k-1}, \frac{N}{k} - \sum_{i=1}^{k-1} \delta_i\right) &= k + \sum \left(\frac{N}{k} + \delta_i - 3\right)^2 + \left(\frac{N}{k} - \sum_{i=1}^{k-1} \delta_i - 3\right)^2 \\ &= k + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{N}{k} - 3\right)^2 + 2\left(\frac{N}{k} - 3\right) \sum_{i=1}^{k-1} \delta_i + \sum_{i=1}^{k-1} \delta_i^2 \\ &\quad + \left(\frac{N}{k} - 3\right)^2 - 2\left(\frac{N}{k} - 3\right) \sum_{i=1}^{k-1} \delta_i + \left(\sum_{i=1}^{k-1} \delta_i\right)^2 \\ &= E\left(\frac{N}{k}, \ldots, \frac{N}{k}\right) + \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \delta_i^2}_{\geq 0} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k-1} \delta_i\right)^2}_{\geq 0} \\ &\geq E\left(\frac{N}{k}, \ldots, \frac{N}{k}\right) \end{aligned}$$

Jede Abweichung von der gefunden Lösung führt zu einem höheren Gesamtaufwand und somit ist die gefundene Lösung ein Minimum.
Nun bleibt die Frage: Wie viele Schlitten sollten wir verwenden? Wir wissen, dass wir jeden Schlitten gleichmäßig mit $10/k$ Geschenken beladen sollten. Wenn wir also feste 10 Geschenke auf k Schlitten verteilen müssen, erhalten wir eine Funktion, die nur von k abhängt:

$$\begin{aligned}\tilde{E}(k) := E(10/k, \ldots, 10/k) &= \sum_{i=1}^{k} \left[1 + \left(\frac{10}{k} - 3\right)^2\right] \\ &= k\left[1 + \left(\frac{10}{k} - 3\right)^2\right] \\ &= \frac{100}{k} + 10k - 60.\end{aligned}$$

Wir wollen diese Funktion minimieren, daher sollte die Ableitung nach k null sein:

$$\partial_k \tilde{E}(k) = -\frac{100}{k^2} + 10 \stackrel{!}{=} 0$$

Dies kann umgeschrieben werden als $k = \sqrt{\frac{100}{10}} = \sqrt{10} \approx 3{,}162\ldots$. Auf den Nachweis, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt verzichten wir an dieser Stelle. Dies lässt sich leicht mit der 2. Ableitung überprüfen.

Wir sollten also drei Schlitten verwenden und sie mit jeweils drei Geschenken beladen, wobei einer der Schlitten ein zusätzliches Geschenk tragen sollte, damit alle zehn Geschenke transportiert werden. Santa Cargo sollte die Schlitten folgendermaßen beladen: **(3,3,4)**, um den Aufwand zu minimieren. Dabei spielt die Reihenfolge der Schlitten keine Rolle.

Illustration: Zyanya Santuario

8 Wilde Rentiere

Autorin: Margarita Kostré (ZIB)
Projekt: EF5-2

Aufgabe

Der Weihnachtsmann hat neue wilde Rentiere bekommen, die er gerne einsetzen möchte. Allerdings hat er keine Zeit, sie zu trainieren und kennt nur wenige Regeln über ihre Bewegung. Er weiß, dass die Position x_t der Rentiere zum Zeitpunkt t und die Geschwindigkeit v_t zum Zeitpunkt t bestimmten Regeln folgen. Um diese Regeln richtig zu beschreiben, führt er ein Koordinatensystem auf dem Boden (auf der Ebene) ein. Dann kann er die iterativen Gleichungen für die Geschwindigkeit v_t und die Position x_t aufschreiben:

$$v_{t+1} = -0.5v_t - ax_t$$

$$x_{t+1} = x_t + v_{t+1},$$

wobei der sogenannte Angstwert a eine positive reelle Zahl ist, die vom Rentier abhängt. Der Angstwert beschreibt, ob ein Rentier zutraulich ist und irgendwann nicht mehr vor dem Weihnachtsmann wegrennt. Ist der Angstwert a eines Rentiers günstig, dann wird das Rentier mit der Zeit beliebig langsam und bleibt auch langsam. Der Weihnachtsmann kann es dann einfangen und nach Hause bringen. Es gibt aber einige Rentiere, die ihre Angst nicht überwinden können. Diese Rentiere rennen immer weiter und schneller und können nicht eingefangen werden.

Gesucht sind alle Angstwerte a, die ein Rentier haben kann, damit der Weihnachtsmann es einfangen kann. Dabei soll davon ausgegangen werden, dass die Rentiere mit der Geschwindigkeit $v_0 = (0, 0)$ an der Position $x_0 = (1, 1)$ starten.

Hinweise und Bemerkungen:

Beachte, dass die Multiplikation einer Zahl λ und eines Punktes (x_1, x_2) durch $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$ definiert ist. Die Addition oder Subtraktion ist koordinatenweise definiert: $(x_1, x_2) \pm (y_1, y_2) = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2)$.

Zur Lösung dieser Aufgabe kann es hilfreich sein, den Betrag zu verwenden. Der Betrag stellt den Abstand einer Zahl zu 0 dar und ist definiert durch

$$|x| = \begin{cases} x & \text{, wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{, wenn } x < 0 \end{cases} .$$

Für den Absolutwert und zwei reelle Zahlen a, b gelten die folgenden Regeln:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|a - b| \geq ||a| - |b||$$

$$|ab| \leq |a||b|$$

Der Ausdruck „beliebig langsam werden und bleiben“ bedeutet in dieser Aufgabe Folgendes: Für jede positive Zahl $\epsilon > 0$ gibt es einen Zeitpunkt t_0, sodass, wenn $t \geq t_0$, dann für jede Komponente v der Geschwindigkeit v_t gilt $|v| < \epsilon$.

Antwortmöglichkeiten:

1. $0 < a < 0.1$
2. $0 < a < 0.2$
3. $0 < a < 0.3$
4. $0 < a < 0.4$
5. $0 < a < 0.5$
6. $0 < a < 0.6$
7. $0 < a < 0.7$
8. $0 < a < 0.8$
9. $0 < a < 0.9$
10. $0 < a < 1$

Projektbezug

Im EF5-2 Projekt „Datengetriebenes Modellieren des Romanisierungsprozesses in Nordafrika“, werden historische Daten verwendet, um Netzwerke zu ermitteln, die die Ausbreitung der Kultur darstellen. Aufgrund des geringen Datenumfangs bieten viele Netzwerke ähnliche Erklärungen für den Ausbreitungsprozess. Daher ist es wichtig, Algorithmen zu verwenden, die eine breite Palette möglicher Lösungen geben können. Ein solcher Algorithmus ist der Particle Swarm Optimization (PSO), der die Bewegung eines Vogelschwarmes simuliert, wobei die Positionen und Geschwindigkeiten der Teilchen durch eine Differenzengleichung gesteuert werden, wie sie hier gezeigt wird. Verschiedene Parameter können zu unterschiedlichen dynamischen Verhaltensweisen des Algorithmus führen und diese Variationen können je nach spezifischem Problem vorteilhaft sein.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Zunächst stellen wir fest, dass der Wert der beiden Koordinaten v_t oder x_t immer derselbe ist. Daher können wir uns auf die erste Koordinate beschränken. Wir werden die Notation v_t, x_t beibehalten, die nun reale Zahlen bezeichnet (die ersten Koordinaten der ,,alten" v_t, x_t).
Um uns das Leben zu erleichtern, kombinieren wir die Gleichungen für Geschwindigkeit und Position zu einer einzigen Gleichung für die Positionen:

$$x_{t+1} = x_t + v_{t+1} = x_t - 0.5v_t - ax_t \stackrel{*}{=} x_t - 0.5(x_t - x_{t-1}) - ax_t,$$

wobei wir die zeitverschobene und umgestellte Version der Positionsregel $v_t = x_t - x_{t-1}$ in der Gleichung $*$ verwendet haben. Vereinfachen der Gleichung ergibt:

$$x_{t+1} = (0.5 - a)x_t + 0.5x_{t-1}, \quad (t \geq 1).$$

Damit die Rentiere beliebig langsam werden und bleiben, müssen die Terme in dieser Iteration mit der Zeit abnehmen. Um dies zu zeigen, beweisen wir in Behauptung 1, dass das langsamer Werden und Bleiben von v_t äquivalent damit ist, dass x_t klein wird und bleibt. In Behauptung 2 zeigen wir dann, dass x_t kleiner wird und bleibt, wenn $0 < a < 1$. Dies führt bereits zur richtigen Antwortoption für diese Aufgabe. Für Interessierte beweisen wir in Behauptung 3 auch, dass v_t nicht klein wird, wenn $a \geq 1$:

- **Behauptung 1:** Die Rentiere werden und bleiben langsam, genau dann wenn die Position x_t beliebig klein wird und bleibt.
- **Behauptung 2:** Wenn $0 < a < 1$, dann gilt $|x_{2n}| \leq r^n$, $|x_{2n+1}| \leq r^n$ für ein festes $r < 1$ und für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$. (Dies stellt sicher, dass die x_t-Werte mit der Zeit beliebig klein werden und bleiben.)
- **Behauptung 3:** Wenn $a \geq 1$, dann gilt für die Geschwindigkeit $|v_t| \geq \min(|v_1|, |v_2|)$ für alle $t \geq 2$. Hier bezeichnet $\min(a, b)$ den kleineren Wert von a und b.

Behauptung 1:
Zunächst geben wir eine intuitive Erklärung. Angenommen, die v_t-Werte werden und bleiben beliebig klein, aber die x_t-Werte nicht. Wir versuchen nun, einen Widerspruch herbeizuführen. Nach der Definition von v_{t+1} gilt:

$$v_{t+1} = -0.5v_t - ax_t.$$

Wenn wir einen Zeitpunkt t wählen, für den v_t und alle darauf folgenden Geschwindigkeiten vernachlässigbar kleiner als ax_t sind (was wir tun können, da x_t und damit ax_t nicht beliebig klein bleiben), können wir v_{t+1} mit

$$v_{t+1} \approx -ax_t$$

annähern. Aber dann ist v_{t+1} in etwa so groß wie ax_t, was einen Widerspruch darstellt. Ähnlich kann gezeigt werden, dass wenn die x_t-Werte beliebig klein werden und bleiben, auch die v_t-Werte dies tun.

Um dieses Argument rigoroser zu machen, wählen wir eine beliebig kleine Zahl $\epsilon > 0$ und ein $T > 1$, sodass für alle $t > T$, $|v_t| < \epsilon$. Nach der Definition der x_t-Werte nähern sie sich auch einer Zahl x. Wenn x nicht 0 wäre, dann könnten wir mit den folgenden Berechnungen einen Widerspruch führen:

$$\begin{aligned}|x_t - x| < \epsilon \quad &\Longrightarrow \quad ||x_t| - |x|| < \epsilon \\ &\Longrightarrow \quad -\epsilon < |x_t| - |x| < \epsilon \\ &\Longrightarrow |x| - \epsilon < |x_t|\end{aligned}$$

Mit der Definition von v_{t+1} erhalten wir:

$$\begin{aligned}|v_{t+1}| &= |-0.5v_t - ax_t| \\ &\geq ||ax_t| - |0.5v_t|| \geq |ax_t| - |0.5v_t| \\ &> |ax_t| - 0.5\epsilon \\ &> |ax| - a\epsilon - 0.5\epsilon.\end{aligned}$$

Wenn wir ϵ klein genug wählen, dann ist der Ausdruck größer als 0, was bedeutet, dass v_{t+1} nicht beliebig klein werden kann. Dies ist der versprochene Widerspruch. Dass, wenn die x_t-Werte beliebig klein werden und bleiben, auch die v_t-Werte dies tun, kann ähnlich bewiesen werden. $\square$

Behauptung 2:
Wir berechnen zunächst die ersten beiden Iterationen der Position:

$$x_0 = 1,$$

$$x_1 = 1 - a.$$

Daher gilt $|x_1| < |x_0|$ genau dann, wenn $0 < a < 2$.
Für die nächste Position können wir die Dreiecksungleichung anwenden (siehe Hinweise und Bemerkungen):

$$\begin{aligned}|x_2| &= |(0.5 - a)x_1 + 0.5x_0| \\ &\leq |(0.5 - a)x_1| + |0.5x_0| \\ &= |(0.5 - a)||x_0| + |0.5x_0| \\ &< 0.5 + 0.5 = 1,\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $|0.5 - a| < 0.5$ für $0 < a < 1$. Daher existiert ein solches r, und wir definieren es als $r := |(0.5 - a)| + 0.5$. Damit gilt $|x_2| < |x_0| \cdot r = r$.
Es folgt für x_3:

$$\begin{aligned}|x_3| &= |(0.5 - a)x_2 + 0.5x_1| \\ &\leq |(0.5 - a)x_2| + |0.5x_1| \\ &\leq |(0.5 - a)x_0| + |0.5x_0| = r|x_0| = r.\end{aligned}$$

Und im Allgemeinen können wir Behauptung 2 folgendermaßen beweisen: Angenommen, wir wissen, dass Behauptung 2 bis zu einer Zahl n wahr ist. Dann wollen wir zeigen, dass sie auch für $n+1$ wahr ist. Da für $n=1$ bereits bekannt ist, dass dies zutrifft, können wir dann schließen, dass die Aussage für alle natürlichen Zahlen n wahr ist. Diese Argumentation ist als Beweis durch Induktion bekannt. Es gilt:

$$\begin{aligned}|x_{2n+2}| &= |(0.5-a)x_{2n+1} + 0.5x_{2n}| \\ &\leq |0.5-a||x_{2n+1}| + 0.5|x_{2n}| \\ &\leq |0.5-a|r^n + 0.5r^n = r^{n+1},\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}|x_{2n+3}| &= |(0.5-a)x_{2n+2} + 0.5x_{2n+1}| \\ &\leq |0.5-a|r^{n+1} + 0.5r^n \\ &< |0.5-a|r^n + r^n 0.5 = r^{n+1}.\end{aligned}$$

wobei wir $r<1$ verwendet haben. Da $r<1$, wird die Position beliebig klein und bleibt auch so. $\square$

Behauptung 3:
Nun zeigen wir, dass wenn $a>1$, die Geschwindigkeit zu jedem Zeitschritt immer größer ist als der Betrag der Geschwindigkeit im zweiten oder ersten Zeitschritt und daher nicht beliebig klein werden kann.
Bevor wir das tun, zeigen wir, dass es eine Formel für die v_t's gibt, die nur von der Geschwindigkeit abhängt, ähnlich zu der Formel für die Position:

$$v_{t+1} = -0.5v_t - ax_t \stackrel{*}{=} (0.5-a)v_t + 0.5v_{t-1},$$

wobei wir in $*$ die iterative Definition von $v_t = -0.5v_t - ax_t$ verwendet haben, um den $-ax_t$-Term zu entfernen.

Betrachte die folgenden Beobachtungen:

$$v_1 = -ax_0 = -a < 0, \quad (a>0)$$

$$v_2 = -0.5v_1 - ax_1 = -0.5(-a) - a(1-a) = a^2 - 0.5a > 0 \quad (a > 0.5).$$

Im Allgemeinen können wir durch Induktion beweisen, dass die v_t's abwechselnde Vorzeichen haben, wobei $v_{2n} > 0$ und $v_{2n+1} < 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}v_{2(n+1)} = v_{2n+2} &= \underbrace{(0.5-a)}_{<0}\underbrace{v_{2n+1}}_{<0} + \underbrace{0.5v_{2n}}_{>0} > 0 \\ v_{2(n+1)+1} = v_{2n+3} &= \underbrace{(0.5-a)}_{<0}\underbrace{v_{2n+2}}_{>0} + \underbrace{0.5v_{2n+1}}_{<0} < 0.\end{aligned}$$

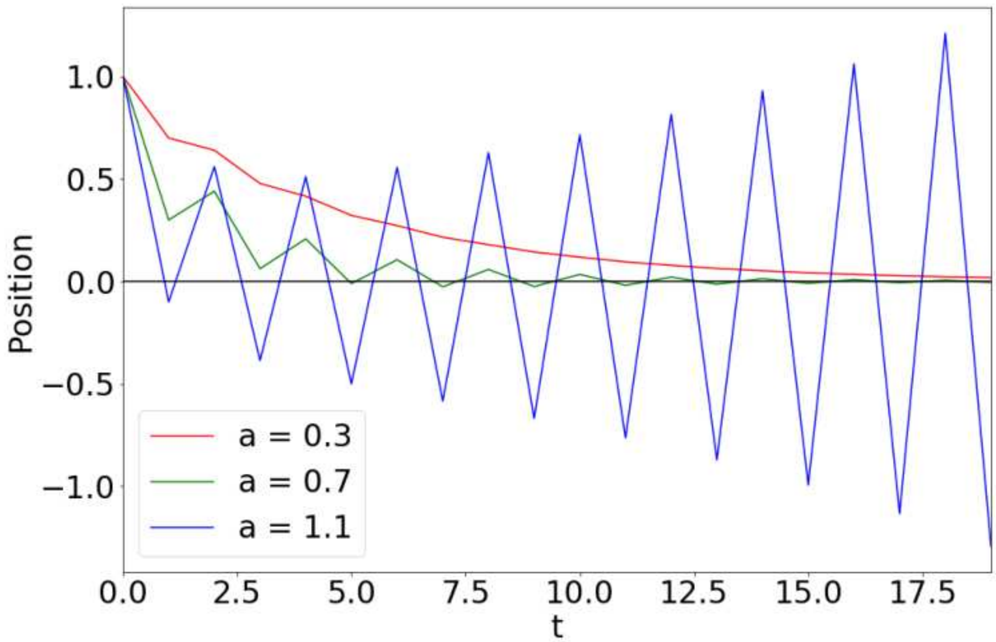


Abbildung 14: Position der ersten Komponente über die Zeit für verschiedene a-Werte

Mit diesem Wissen können wir nun endlich die Behauptung beweisen, ebenfalls durch Induktion:

$$\begin{aligned}
|v_{2n+2}| = v_{2n+2} &= (0.5-a)\underbrace{v_{2n+1}}_{<0} + 0.5v_{2n} \\
&= \underbrace{|0.5-a|}_{\geq 0.5,\text{ wenn } a\geq 1} |v_{2n+1}| + 0.5|v_{2n}| \\
&\geq 0.5|v_{2n+1}| + 0.5|v_{2n}| \\
&\geq \min(|v_{2n+1}|, |v_{2n}|) \geq \min(|v_1|, |v_2|),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|v_{2n+3}| = -v_{2n+3} &= -(0.5-a)v_{2n+2} - 0.5v_{2n+1} \\
&= \underbrace{|0.5-a|}_{\geq 0.5,\text{ wenn } a\geq 1} v_{2n+2} + 0.5|v_{2n+1}| \\
&\geq 0.5|v_{2n+2}| + 0.5|v_{2n+1}| \\
&\geq \min(|v_{2n+2}|, |v_{2n+1}|) \geq \min(|v_1|, |v_2|).
\end{aligned}$$

$\square$

Daher wird das Rentier nur dann beliebig langsam und bleibt auch so, wenn $0 < a < 1$.

In Abb. 14 haben wir die Bewegung einer Komponente des Rentiers mit $a = 0.3$, 0.7 und 1.1 veranschaulicht. Wie gezeigt, bewegen sich die Rentiere mit $a = 0.3$ und $a = 0.7$, die rot und grün dargestellt sind, in Richtung der Position 0, während das Rentier mit $a = 1.1$, das blau dargestellt ist, beschleunigt und oszillatorisches Verhalten zeigt.

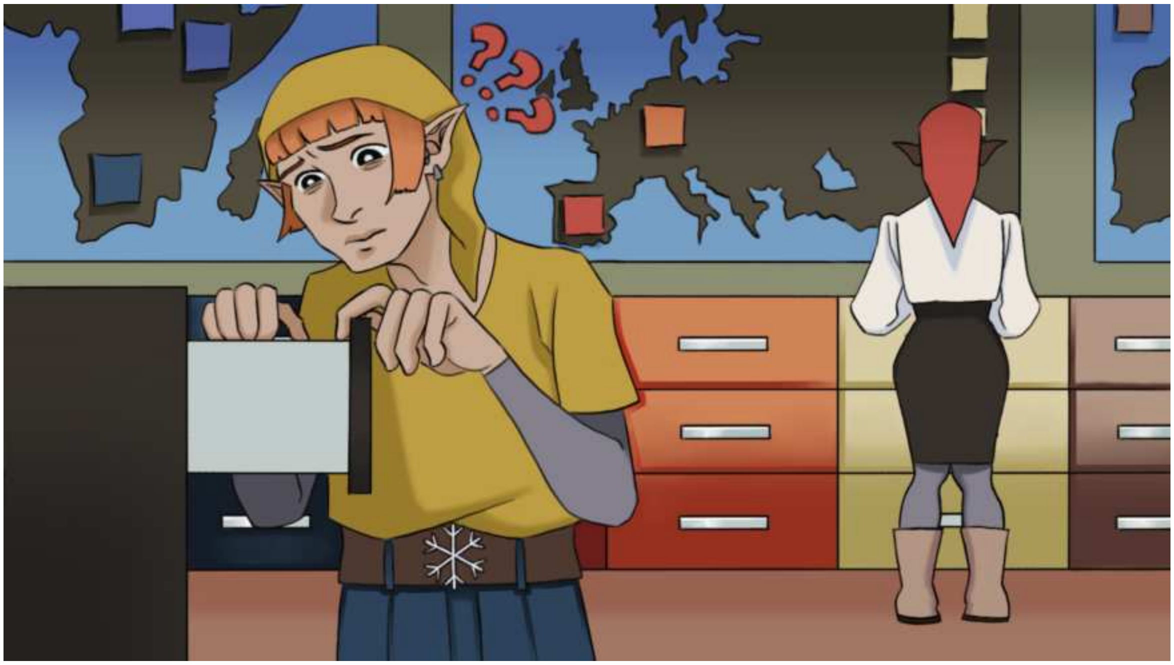


Illustration: Julia Nurit Schönnagel

9 Weihnachtslogistik

Autor*innen: Marieke Heidema & Amir Shakouri
(Universität von Groningen)

Aufgabe

Jedes Jahr zählen die Elfen des Weihnachtsmanns die Menschen, die an einem Ort leben. So wissen sie genau, wie viele Geschenke sie für jede Stadt und jeden Ort herstellen müssen. Sie notieren diese Zahl in einem Buch. Dieses Buch enthält auch andere Informationen z.B. über den Ort, die Lage und die Wettervorhersage.

Als sie kurz vor Weihnachten im Buch nachsehen, finden sie die Einwohnerzahl einer kleinen Insel im Atlantik nicht. Die Elfen geraten in Panik. „Was sollen wir jetzt tun?“, fragen sie einander. Eine hitzige Diskussion beginnt. „Können wir nicht einfach schnell auf die Insel gehen und die Einwohner erneut zählen?“, fragt die junge Beatrice. „Keine Zeit, keine Zeit!“, antwortet Theo. Besorgt fragt Elf Leonard: „Dann müssen wir also schätzen, wie viele Geschenke wir brauchen, aber was, wenn wir nicht genug mitbringen?“ Matthew, einer der älteren Elfen, fügt hinzu: „Nun, wir können ein paar zusätzliche Geschenke mitnehmen, aber wir dürfen auf keinen Fall zu viele mitbringen. Das macht den Schlitten des Weihnachtsmanns zu schwer für die Rentiere. Der Schlitten wird langsamer und die Geschenke könnten nicht rechtzeitig geliefert werden!“ „Was können wir dann tun?“, fragt Beatrice. „Wir können weder zu wenige noch viel zu viele Geschenke mitnehmen. Wie viele nehmen wir also mit?“

Die Elfen verstummen, denken nach und schauen sich hoffnungsvoll an. Doch niemand scheint zu wissen, was zu tun ist. Dann kommt ein leises Husten von der Tür, es ist Lennard, ein junger Elf. Es ist sein erstes Jahr bei den Weihnachtsvorbereitungen und er hat bisher geschwiegen. Als er hustet, schauen die anderen Elfen zu ihm. „Möchtest du etwas sagen, Lennard? Hast du eine Idee?“, fragt Theo. Mit leiser, aber selbstbewusster Stimme antwortet Lennard: „Ja, ich glaube, ich weiß, was zu tun ist. Lasst es mich erklären...“

Lennard zeigt im Buch auf die Seite mit den Daten der Insel. Dort gibt es eine alte Notiz über die Insel, die folgendes sagt:

Weihnachten 2022: ***Achtung, neue Insel, nicht vergessen, die Einwohner*innen zu zählen!***
Hinweis: Es läuft ein Projekt zur Schaffung neuer Wohnräume. Inseln, die zuvor unbewohnt waren, werden jetzt besiedelt. Diese besondere Insel bietet Platz für 200 Menschen, wird aber anfangs nur von 25 Menschen bewohnt. Die Wachstumsrate der Bevölkerung wird auf 2 geschätzt.

Lennard schiebt seine runde Brille weiter auf seine Nase und beginnt zu erklären: „Schaut, wir können Mathematik verwenden, um zu schätzen, wie viele Menschen jetzt auf der Insel leben.“ Er schreibt folgendes an die Tafel:

$$P(t+1) - P(t) = \left(r - \frac{r}{C}P(t)\right) P(t).$$

„Hier ist $P(t)$ die Bevölkerungsgröße im Jahr t. Die Notiz sagt uns, dass die anfängliche Bevölkerungszahl im Jahr 2022 bei 25 lag, also $P(2022) = 25$. Außerdem steht r für die geschätzte Wachstumsrate der Bevölkerung. Laut der Notiz wissen wir, dass $r = 2$ ist. Schließlich ist C die Kapazität der Insel, die laut der Notiz $C = 200$ beträgt.“

Auf dieser Grundlage: Wie hoch wird die geschätzte Einwohnerzahl zu Weihnachten 2024 sein?

Antwortmöglichkeiten:

1. 0 Einwohner*innen.
2. 1 to 22 Einwohner*innen.
3. 23 to 55 Einwohner*innen.
4. 56 to 71 Einwohner*innen.
5. 72 to 98 Einwohner*innen.
6. 99 to 123 Einwohner*innen.
7. 124 to 150 Einwohner*innen.
8. 151 to 183 Einwohner*innen.
9. 184 to 199 Einwohner*innen.
10. 200 Einwohner*innen.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Aus der Aufgabe kennen wir die Parameter

$$r = 2 \quad \text{und} \quad \tfrac{r}{C} = \tfrac{2}{200} = 0,01$$

sowie den Anfangswert $P(2022) = 25$. Daher können wir die Bevölkerungszahl im Jahr 2023 berechnen, basierend auf der Bevölkerungszahl im Jahr 2022:

$$P(2023) = (2 - 0,01 \cdot P(2022)) \cdot P(2022) + P(2022) = 68,75.$$

Ebenso kann die Bevölkerungszahl im Jahr 2024 unter Verwendung der Bevölkerungszahl von 2023 wie folgt geschätzt werden:

$$P(2024) = (2 - 0,01 \cdot P(2023)) \cdot P(2023) + P(2023) \approx 158,98.$$

Daher liegt die geschätzte Bevölkerungszahl im Jahr 2024 im Intervall von Antwort 8.

Bemerkung:

Die Gleichung

$$P(t+1) - P(t) = \left(r - \frac{r}{C}P(t)\right) P(t)$$

modelliert die jährliche Bevölkerungsgröße $P(t)$. Diese Differenzengleichung in diskreter Zeit kann auch durch eine Differentialgleichung in kontinuierlicher Zeit angenähert werden, die sogenannte *logistische Gleichung*:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t) = \left(r - \frac{r}{C}P(t)\right) P(t). \tag{4}$$

Hier stellt $P(t)$ die Bevölkerungsgröße zu einem beliebigen Zeitpunkt dar, und die Differentialgleichung beschreibt, wie sich die Bevölkerungszahl kontinuierlich im Laufe der Zeit entwickelt.
Kombiniert man die Anfangsbedingung mit der Differentialgleichung, ergibt sich folgendes *Anfangswertproblem*:

$$\tfrac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = (2 - 0,01P(t))\, P(t), \quad P(2022) = 25.$$

Hierbei können wir die Ableitung von P an der Stelle t näherungsweise wie folgt ausdrücken:

$$\tfrac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} \approx \tfrac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$

wenn Δt klein genug ist. Zum Beispiel ergibt sich bei $\Delta t = 1$ Jahr exakt die zeitdiskrete Gleichung von Lennard. Die Diskretisierung ist eine gängige Technik in der numerischen Mathematik. Sie wird oft verwendet, um komplexe Anfangswertprobleme, die analytisch nicht lösbar sind, durch Unterteilung in diskrete Schritte zu approximieren.
Durch die *Trennung der Variablen* kann die Differentialgleichung (4) in die folgende Integralgleichung umgeschrieben werden:

$$\int \frac{1}{(r - \frac{r}{C}P)P}\mathrm{d}P = \int \mathrm{d}t.$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $P(2022) = 25$ ergibt sich die Lösung des Anfangswertproblems:

$$P(t) = \frac{CP(2022)}{(C - P(2022))e^{r(2022-t)} + P(2022)}.$$

Setzt man die Werte $r = 2$, $C = 200$ und $P(2022) = 25$ ein, so erhält man die Bevölkerungszahl im Jahr 2024:

$$P(2024) = 177,272 \approx 177.$$

Beachten Sie, dass diese Bevölkerungszahl ebenfalls im Intervall von Antwort 8 liegt.

Illustration: Ivana Martić

10 Weihnachtsplätzchen ausstechen

Autoren: Pim van 't Hof, Stefano Piceghello (Universität von Twente)
Projekt: 4TU.AMI

Aufgabe

Die Elfen Pi und Pie backen perfekt runde Weihnachtsplätzchen. Mit einem kreisrunden Plätzchenausstecher schneiden sie vier identische Plätzchen aus einem großen kreisrunden Teig aus. Abbildung 15 zeigt den verbleibenden Teig nachdem die Plätzchen in den Ofen gelegt wurden. Die Abbildung zeigt außerdem zwei senkrecht zueinander stehende Durchmesser AB und CD des großen Teigkreises. Der Durchmesser AB ist tangential zur Begrenzung eines der kreisförmigen Löcher. Die Strecke EF ist eine Sehne des großen Teigkreises, die ebenfalls tangential zur Begrenzung desselben Loches verläuft und parallel zum Durchmesser AB ist. Die Länge von EF beträgt 36 cm.

Wie groß ist die Fläche des übrig gebliebenen Teigs?

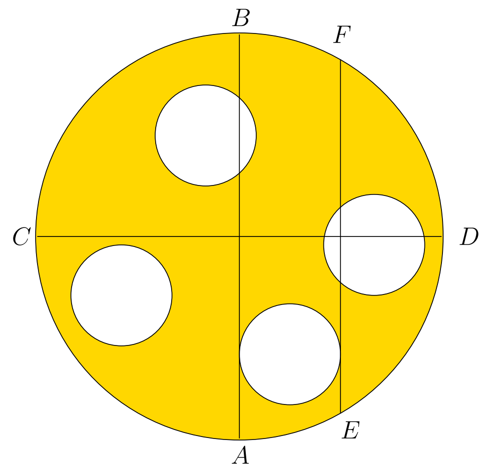


Abbildung 15: Der übrig gebliebene Teig.

Antwortmöglichkeiten:

1. 244π cm^2
2. 300π cm^2
3. 312π cm^2
4. 320π cm^2
5. 324π cm^2
6. 344π cm^2
7. 360π cm^2
8. 368π cm^2
9. 381π cm^2
10. Es gibt nicht genügend Informationen, um die Fläche des übrig gebliebenen Teigs zu berechnen.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 5.

Wir betrachten nur das rechte untere Viertel des großen Teigs und das Loch, dessen Rand in Abbildung 15 tangential an die Liniensegmente AB und EF anliegt. Bezeichnen wir mit O den Mittelpunkt des großen Teigkreises und mit S den Schnittpunkt der Liniensegmente CD und EF, so erhalten wir die in Abbildung 16 dargestellte Situation. Wir werden die schattierte Fläche in Abbildung 16 berechnen, die offensichtlich $\frac{1}{4}$ der gesuchten Fläche entspricht, d.h. $\frac{1}{4}$ der schattierten Fläche in Abbildung 15.

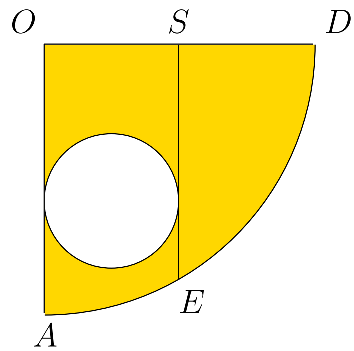


Abbildung 16: Das Problem auf eine einfachere Form reduziert.

Sei R der Radius des großen Teigkreises und d der Durchmesser des kreisförmigen Lochs. Dann gilt in Abbildung 16: $OD = OA = OE = R$. Aus der Aufgabenstellung wissen wir, dass $EF = 36$ cm in Abbildung 15 ist und EF senkrecht zum Durchmesser AB steht, sodass $ES = 18$ cm. Nach dem Satz des Pythagoras folgt:

$$OS = \sqrt{(OE)^2 - (ES)^2} = \sqrt{R^2 - 18^2} \text{ cm}.$$

Da $OS = d$ der Durchmesser des kreisförmigen Lochs ist, ergibt sich für die Fläche des kreisförmigen Lochs:

$$\pi \left(\frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 18^2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi \left(R^2 - 18^2\right) \text{ cm}^2.$$

Die Fläche des großen Viertelkreises vor dem Ausschneiden des Lochs war gleich $\frac{1}{4}\pi R^2$ cm^2, sodass die schattierte Fläche in Abbildung 16 gleich

$$\frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{4}\pi \left(R^2 - 18^2\right) = \frac{324}{4}\pi \text{ cm}^2$$

beträgt. Wir schließen daraus, dass die schattierte Fläche in Abbildung 15, d.h. die verbleibende Teigfläche, nachdem die Elfen Pi und Pie die vier Kekse ausgestochen haben, 324π cm^2 beträgt.

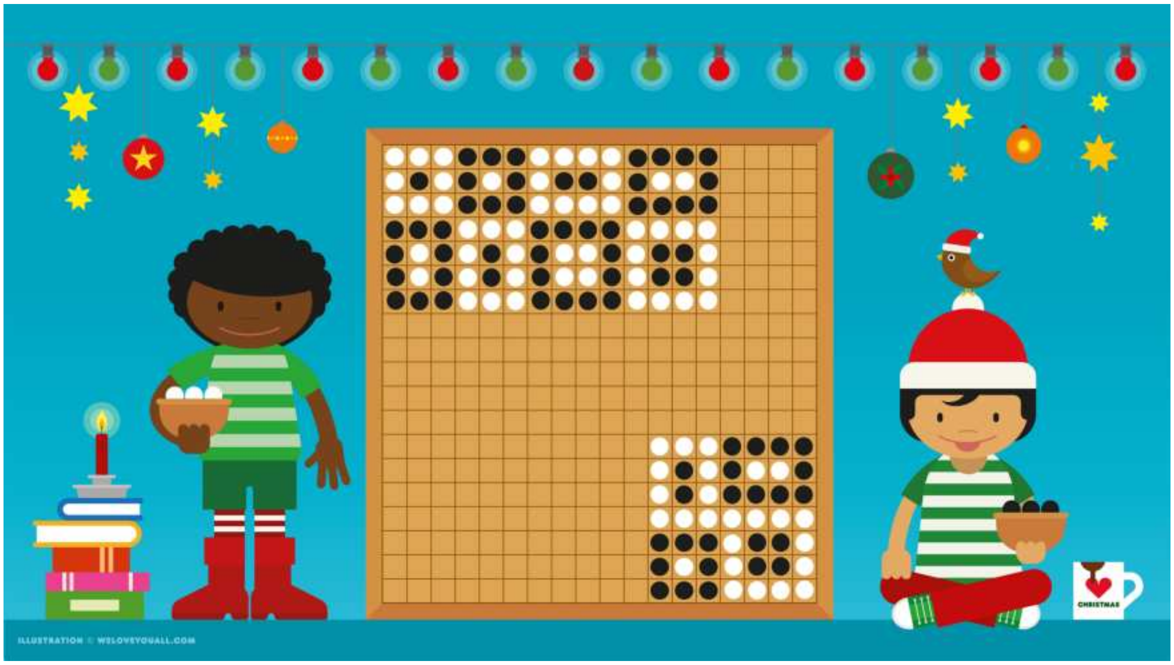


Illustration: Friederike Hofmann

11 Go für Weihnachten!

Autor: Hajo Broersma
Projekt: 4TU.AMI

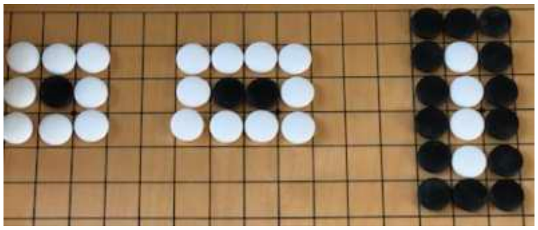
Aufgabe

Um die Zeit an einem dunklen, regnerischen Tag vor Weihnachten zu vertreiben, nehmen die drei Zwerge Godric, Goliath und Gowan die Herausforderung an, die 18×18 Felder eines traditionellen Go-Bretts mit weißen und schwarzen Steinen auf eine künstlerische und optisch ansprechende Weise zu füllen. Um ihr Ziel zu erreichen, einigen sie sich darauf, die folgenden Grundbausteine für ihre Designs zu verwenden:

1. Ziegel bestehen aus einer einfarbigen Kette, die genau eine Reihe breit ist. Diese Reihe ist von einem Rahmen der anderen Farbe umgeben. Die Notation k-Ziegel für $k \geq 1$ beschreibt einen Ziegel, dessen einfarbige Kette die Länge k hat.

2. Kacheln bestehen aus einem einfarbigen Quadrat in der Mitte, das von einem Rahmen der anderen Farbe umgeben ist. Die Notation k-Kachel für $k \geq 1$ beschreibt eine Kachel, deren mittleres einfarbiges Quadrat die Größe $k \times k$ hat.

Beispielhaft sieht man einen weißen 1-Ziegel, einen weißen 2-Ziegel und einen schwarzen 4-Ziegel in Abbildung 17 links dargestellt. Entsprechend sind eine schwarze 1-Kachel, eine schwarze 2-Kachel und eine weiße 4-Kachel in Abbildung 17 rechts dargestellt.
1-Ziegel und 1-Kachel derselben Farbe sind also identisch.



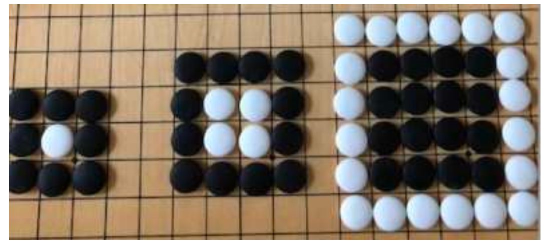


Abbildung 17: Darstellung von Ziegeln und Kacheln. Links: Ein weißer 1-Ziegel, ein weißer 2-Ziegel und ein schwarzer 4-Ziegel. Rechts: Eine schwarze 1-Kachel, eine schwarze 2-Kachel und eine weiße 4-Kachel.

Die Herausforderung der drei Zwerge besteht darin, die Grundbausteine zu nutzen, um die 18×18 Felder eines traditionellen Go-Bretts mit weißen und schwarzen Steinen so zu füllen, dass:

- alle Felder bedeckt sind;
- die Gesamtanzahl der verwendeten weißen Steine gleich der Gesamtanzahl der verwendeten schwarzen Steine ist;
- Zwei Grundbausteine mit gleicher Rahmenfarbe sich nicht berühren, sondern höchstens über Eck aneinander grenzen.

Abbildung 18 zeigt eine teilweise Abdeckung des Go-Bretts, die erlaubt ist (linke obere Ecke), und eine teilweise Abdeckung, die nicht erlaubt ist (rechte untere Ecke; die roten Punkte markieren einen Konflikt).

Die Zwerge versuchen nun, so viele Grundbausteine verschiedener Größen wie möglich zu verwenden. Die Anzahl der Grundbausteine verschiedener Größe bezeichnen sie als ästhetische Qualität. Die Farben werden für die Zählung ignoriert. Als Beispiel: Die Teilabdeckung im oberen Teil von Abbildung 18 verwendet 1-Ziegel (1-Kacheln), 2-Ziegel, 2-Kacheln und keine weiteren Grundbausteine. Daher würde diese Teilabdeckung eines 7×14 Bretts eine Bewertung von 3 für die ästhetische Qualität erhalten.
Die drei Zwerge untersuchen verschiedene Strategien zur Gestaltung des Go-Bretts. Dabei gilt:

- Godric darf nur Ziegel verwenden.
- Goliath darf nur Kacheln verwenden.
- Gowan darf eine Mischung aus beliebigen Ziegeln und Kacheln verwenden.

Jeder von ihnen versucht, die höchstmögliche Punktzahl für die ästhetische Qualität zu erreichen, wobei alle oben genannten Einschränkungen beachtet werden müssen.
Frage: Was sind die höchstmöglichen Punktzahlen von Godric, Goliath und Gowan?

Abbildung 18: Eine erlaubte (oben links) und eine nicht erlaubte (unten rechts) Teilabdeckung

Antwortmöglichkeiten:

1. Die höchsten Punktzahlen von Godric, Goliath und Gowan sind 3, 1 und 3.
2. Die höchsten Punktzahlen von Godric, Goliath und Gowan sind 3, 1 und 4.
3. Die höchsten Punktzahlen von Godric, Goliath und Gowan sind 3, 2 und 5.
4. Die höchsten Punktzahlen von Godric, Goliath und Gowan sind 4, 1 und 4.
5. Die höchsten Punktzahlen von Godric, Goliath und Gowan sind 4, 1 und 5.
6. Die höchsten Punktzahlen von Godric, Goliath und Gowan sind 4, 2 und 6.
7. Die höchsten Punktzahlen von Godric, Goliath und Gowan sind 5, 1 und 5.
8. Die höchsten Punktzahlen von Godric, Goliath und Gowan sind 5, 2 und 5.
9. Die höchsten Punktzahlen von Godric, Goliath und Gowan sind 5, 2 und 6.
10. Keine der anderen Antwortmöglichkeiten ist richtig.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 4.

Es existiert eine korrekte Abdeckung, die alle Einschränkungen erfüllt, indem nur 1-Ziegel (1-Kacheln) verwendet werden.

Dies ist der Fall, da die Seiten eines 1-Ziegels (1-Kachels) genau 3 Steine enthalten. Somit kann jede der sechs 3×18-Spalten eines 18×18 Go-Bretts korrekt mit sechs 1-Ziegeln (1-Kacheln) bedeckt werden, die abwechselnd in ihrer Farbe angeordnet sind. Auch benachbarte Spalten können mit abwechselnden Farben bedeckt werden. Insgesamt besteht diese Abdeckung aus 36 1-Ziegeln (1-Kacheln), von denen 18 weiß und 18 schwarz sind, sodass die Abdeckung korrekt ist. Da alle verwendeten Grundbausteine in dieser Abdeckung gleich sind (mit Ausnahme der wechselnden Farben, die wir ignorieren sollten), erhält diese Abdeckung eine Bewertung von 1.

Mit ausschließlich k-Kacheln ist es nicht möglich, korrekt mit unterschiedlichen Kacheln zu bedecken.

Wir werden nun zeigen, dass Goliath keine korrekte Abdeckung finden kann, die mehr als einen Typ von Kacheln verwendet. Daher beträgt Goliaths maximale Punktzahl 1. Angenommen, Goliath beginnt damit, die linke obere Ecke des Go-Bretts mit einer k-Kachel und daneben mit einer ℓ-Kachel für $\ell > k$ zu bedecken. Das Platzieren von zwei unterschiedlich großen Kacheln mit abwechselnden Farben nebeneinander erzeugt eine Ecke, bei der ein schwarzer Stein an einer Kante und ein weißer Stein an einer anderen Kante angrenzt. Es ist daher nicht möglich einen Stein in dieser Ecke zu platzieren.

Abdeckung mit Ziegeln kann eine Punktzahl von 4 erreichen.

Zunächst zeigen wir eine mögliche Abdeckung mit 4 unterschiedlich großen Ziegeln in Abbildung 19.

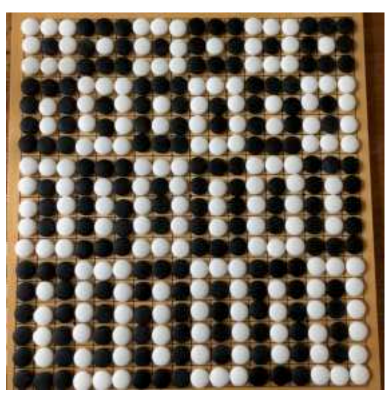


Abbildung 19: Eine korrekte Abdeckung mit einer Punktzahl von 4

Abdeckung mit Ziegeln kann maximal einen Punktestand von 4 erreichen.

Angenommen, es gibt eine korrekte Abdeckung mit einem Punktestand von 5 oder mehr. Dann verwendet diese Abdeckung mindestens k-Ziegel mit fünf verschiedenen Werten von $k \geq 1$. Abgesehen von den 1-Ziegeln haben diese nicht-quadratischen k-Ziegel zusammen lange Seiten, deren Gesamtlänge mindestens $4 + 5 + 6 + 7 = 22$ Steine beträgt, wobei jede kurze Seite aus 3 Steinen besteht. Wir erinnern, dass entlang der langen Seite eines k-Ziegels mit $k \geq 2$ nur k-Ziegel mit dem gleichen festen Wert von k platziert werden können, während entlang der kurzen Seite ein beliebiger ℓ-Ziegel platziert werden kann, wie in der Anordnung in Abbildung 19. Da das Go-Brett 18×18 ist, können wir nicht 22 oder mehr Steine an der linken Seite (der ersten Spalte) oder der oberen Seite (der ersten Reihe) des Bretts platzieren, sodass wir gezwungen sind, mindestens eine lange Seite eines nicht-quadratischen k-Ziegels an einer dieser Seiten zu platzieren. Aber dann erhalten wir bei der Schnittmenge der Reihen und Spalten, die diesen langen Seiten entsprechen, einen Konflikt, da dort unterschiedliche k-Ziegel aufeinandertreffen. Die in dieser Schnittmenge platzierten Ziegel können aufgrund der Ausrichtung der unterschiedlichen k-Ziegel keine Seite haben, die aus 3 Steinen besteht, ansonsten entsteht eine Ecke, die, wie bereits gezeigt, nicht erlaubt ist.

Abdeckung mit Ziegeln und Kacheln kann maximal einen Punktestand von 4 erreichen.

Nun zeigen wir, dass die Verwendung zusätzlicher k-Kacheln mit einem festen Wert $k \geq 2$ nicht zu einem höheren Punktestand führt. Dies liegt daran, dass neben einer solchen k-Kachel nur entweder eine andere k-Kachel mit entgegengesetzten Farben oder ein k-Ziegel (mit entgegengesetzten Farben) entlang der langen Seite des k-Ziegels platziert werden kann. Führen wir dieses Muster iterativ fort, so müssen die gesamten $k + 2$ Reihen und Spalten des Go-Bretts, die die k-Kachel enthalten, nur mit k-Ziegeln und k-Kacheln gefüllt werden. Da dann neben einem k-Ziegel nur ein anderer k-Ziegel (entweder an der langen Seite oder an der kurzen Seite), eine k-Kachel (an der langen Seite) oder ein 1-Ziegel platziert werden kann, kann eine solche Abdeckung nicht einen höheren Punktestand als 3 erreichen. Ansonsten würden wieder Ecken entstehen.

Die obigen Argumente implizieren, dass ein Punktestand über 3 nur möglich ist, wenn keine k-Kacheln mit $k \geq 2$ in der Abdeckung verwendet werden, also wenn wir annehmen, dass nur k-Ziegel verwendet werden (da eine 1-Kacheln ein 1-Ziegel ist). Wir haben bereits eine solche korrekte Abdeckung mit einem Punktestand von 4 gezeigt. Daher schließen wir, dass die höchsten Punktzahlen von Godric und Gowan beide 4 sind.

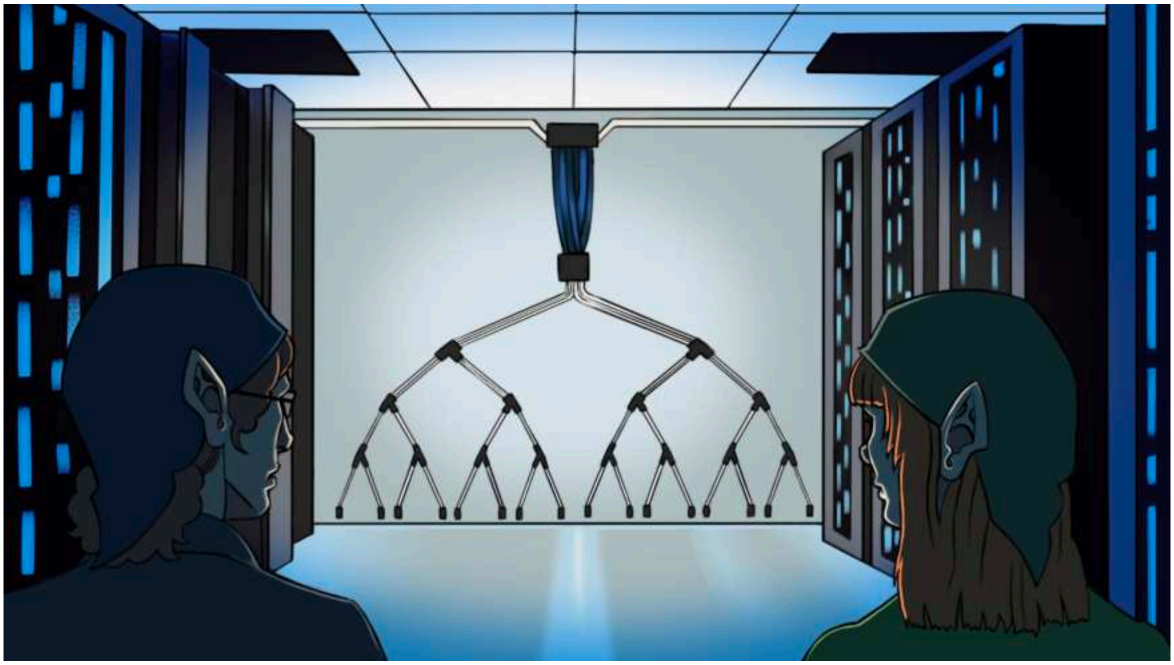


Illustration: Julia Nurit Schönnagel

12 Kabel-Chaos

Autor: Lukas Protz
Projekt: MATH+

Aufgabe

Paula und Quentin sind die Chefelfen der IT-Abteilung am Nordpol. Normalerweise läuft in der Abteilung alles nach Plan, aber eines Tages erhalten sie Nachrichten von zwei der dort arbeitenden Elfen. Diese beschweren sich über Probleme bei der Verbindung zum Winternet (dem Äquivalent des Internets am Nordpol).

Da die Verbindung zum Winternet über Kabel erfolgt, vermuten Paula und Quentin, dass einige der Kabel beschädigt sein könnten, und gehen daher in den Kabelraum, um diese zu überprüfen. Die Kabelanschlüsse, die zu den beiden Elfen gehören, sind mit „$\frac{22}{7}$" und „$\frac{87}{32}$" beschriftet. Beachte, dass die Beschriftungen der Kabel zwar in Form von Brüchen sind, aber (a priori) keinen Zusammenhang mit rationalen Zahlen haben.

Im Kabelraum angekommen, stehen Paula und Quentin vor einem riesigen Kabelbaum und sind überwältigt. Wie sollen sie bloß die beiden Kabelanschlüsse finden, die sie suchen? Zum Glück finden sie eine Notiz und ein Bild (siehe Abbildung 20) an der Wand, die erklären, wie die Anschlüsse beschriftet sind:

(*Abbildung auf der nächsten Seite*)

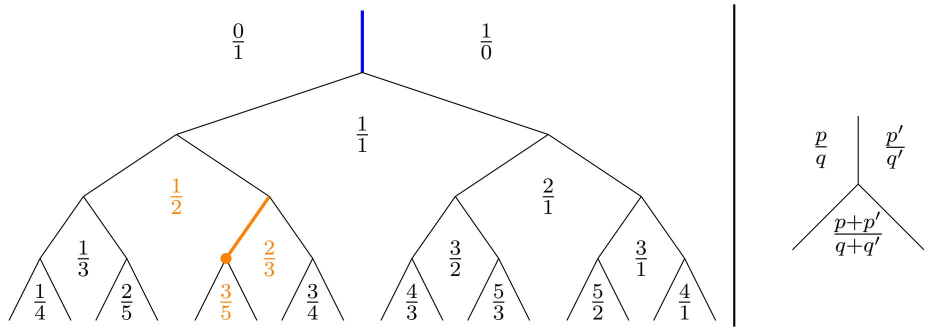


Abbildung 20: **Links:** Die Wurzeln des Baums mit den entsprechenden Beschriftungen. **Rechts:** Die Regel, um eine neue Beschriftung zu erhalten, wenn sich eine Wurzel aufteilt und ein Kabel endet. Der orange Punkt kennzeichnet das Ende des Kabels mit der Beschriftung „$\frac{3}{5}$“.

1. Die Kabel sind in einer Baumstruktur (dem Kabelbaum) angeordnet, siehe Abbildung 20. Die Kabelbündel sind die einzelnen Wurzeln (Kanten) des Kabelbaums. Es gibt eine Hauptwurzel des Baums, die im Bild blau gefärbt ist.

2. Der Bereich links von der Hauptwurzel ist mit „$\frac{0}{1}$“ , der Bereich rechts davon mit „$\frac{1}{0}$“ beschriftet.

3. Jedes Mal, wenn sich eine Wurzel in zwei neue Wurzeln aufteilt, endet ein Kabel, und die anderen setzen sich entlang einer der beiden neuen Wurzeln fort.

4. Die Hauptwurzel teilt sich in zwei neue Wurzeln. Das Kabel, das an diesem Teilungspunkt endet, trägt die Beschriftung „$\frac{1}{1}$“, die wie folgt aus den Beschriftungen des linken und rechten Bereichs gebildet wird:
$$\frac{0+1}{1+0} = \frac{1}{1}.$$
Der durch die beiden neuen Wurzeln neu geschaffene Bereich wird ebenfalls mit „$\frac{1}{1}$“ beschriftet.

5. Dieser Prozess geht unendlich weiter. Jede Wurzel teilt sich in zwei neue Wurzeln, ein Kabel endet und ein neuer Bereich wird geschaffen. Wenn die Beschriftungen des rechten und linken Bereichs der Wurzel vor dem Teilungspunkt „$\frac{p}{q}$“ und „$\frac{p'}{q'}$“ lauten, dann wird das endende Kabel und der neue Bereich mit „$\frac{p''}{q''}$“ beschriftet, gemäß der folgenden Regel:
$$\frac{p''}{q''} = \frac{p+p'}{q+q'}.$$

6. Zum Beispiel lauten die Beschriftungen der Bereiche links und rechts der in orange hervorgehobenen Wurzel in Abbildung 20 „$\frac{1}{2}$“ und „$\frac{2}{3}$“, und die Beschriftung des neuen Bereichs sowie des endenden Kabels am orangefarbenen Punkt lautet
$$\frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5}.$$

Um die gesuchten Kabel zu finden, starten Paula und Quentin von der Hauptwurzel. Jedes Mal, wenn sich eine Wurzel teilt, folgen sie entweder der linken oder der rechten Wurzel, bis sie an einem Teilungspunkt für eines der gesuchten Kabel ankommen. Kannst du Paula und Quentin helfen, die Enden der Kabel mit den Beschriftungen „$\frac{22}{7}$“ und „$\frac{87}{32}$“ zu finden, indem du die Summe der Rechtsabbiegungen und die Summe der Linksabbiegungen bestimmst?

Beispiel: Um von der Hauptwurzel zu dem Teilungspunkt zu gelangen, an dem das Kabel mit der Beschriftung „$\frac{3}{5}$“ endet, müssen sie zuerst nach links, dann nach rechts und schließlich wieder nach links abbiegen.

Hinweis: Um unsere Terminologie rund um linke und rechte Bereiche zu klären, definieren wir diese Konzepte relativ zur Hauptwurzel. Definiere den Abstand eines Teilungspunkts von der Hauptwurzel als die Anzahl der Teilungspunkte entlang des Pfades von der Hauptwurzel zu diesem Teilungspunkt, durch die Zwischenwurzeln im Kabelbaum hindurch. Zum Beispiel hat der Teilungspunkt mit der Beschriftung „$\frac{1}{2}$“ einen Abstand von 2 zur Hauptwurzel.
Ein Teilungspunkt wird als näher an der Hauptwurzel liegend bezeichnet als ein anderer, wenn sein Abstand zur Hauptwurzel kleiner ist als der des anderen Punktes.
Jede Wurzel verbindet zwei Teilungspunkte, von denen einer näher an der Hauptwurzel liegt. Wenn man sich von dem Teilungspunkt, der weiter von der Hauptwurzel entfernt ist, zu dem bewegt, der näher liegt, wird der linke Bereich als der Bereich definiert, der in Richtung einer 90°-Drehung gegen den Uhrzeigersinn zur Bewegungsrichtung liegt, während der rechte Bereich in Richtung einer 90°-Drehung im Uhrzeigersinn liegt. Die linke Wurzel ist diejenige der neuen Wurzeln an einem Teilungspunkt, die an den linken Bereich angrenzt. Analog ist die rechte Wurzel diejenige der neuen Wurzeln, die an den rechten Bereich angrenzt.

Antwortmöglichkeiten:

1. 6 Links- und 8 Rechtsabbiegungen
2. 11 Links- und 8 Rechtsabbiegungen
3. 8 Links- und 9 Rechtsabbiegungen
4. 10 Links- und 9 Rechtsabbiegungen
5. 7 Links- und 10 Rechtsabbiegungen
6. 9 Links- und 10 Rechtsabbiegungen
7. 8 Links- und 11 Rechtsabbiegungen
8. 7 Links- und 12 Rechtsabbiegungen
9. 6 Links- und 13 Rechtsabbiegungen
10. Nicht beide Beschriftungen erscheinen im Baum.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 2.

Um die Lösung zu vereinfachen, lassen wir die Anführungszeichen um die Beschriftungen weg. Natürlich ist eine Möglichkeit, diese Aufgabe zu lösen, einfach den Baum in Bezug auf die Länge eines Pfades zu durchsuchen. Schließlich findet man dann den richtigen Pfad. Es gibt jedoch einige Beobachtungen, die den Rechenaufwand erheblich reduzieren können. Wir werden sie weiter unten besprechen. Zunächst bestätigen wir, dass die Lösung korrekt ist. Um zu dem Teilungspunkt zu gelangen, an dem das Kabel mit der Beschriftung $\frac{22}{7}$ endet, muss man 3 Mal nach rechts und dann 6 Mal nach links abbiegen. Um zu $\frac{87}{32}$ zu gelangen, muss man 2 Mal nach rechts, dann nach links, dann 2 Mal nach rechts, dann nach links, dann nach rechts und schließlich 3 Mal nach links abbiegen. Tatsächlich zeigt Abbildung 21, dass die Zahlen an den angegebenen Positionen erscheinen und die Summe der Rechtsabbiegungen 8 und die Summe der Linksabbiegungen 11 beträgt.

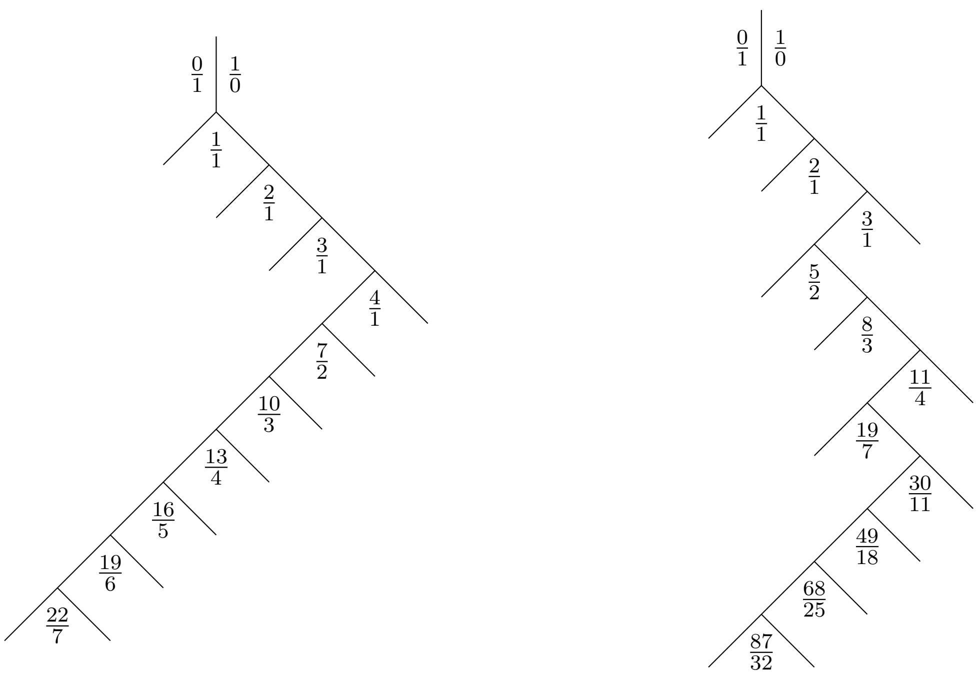


Abbildung 21: **Links:** Der Pfad zu $\frac{22}{7}$. **Rechts:** Der Pfad zu $\frac{87}{32}$.

Um die Anzahl der Berechnungen zur Bestimmung der obigen Lösung zu reduzieren, können folgende Beobachtungen gemacht werden:

Die Bezeichnungen der Regionen und Kabel können direkt mit Brüchen identifiziert werden, mit der einzigen Ausnahme von $\frac{1}{0}$. Wir interpretieren diesen Ausdruck im Folgenden als eine Art Zahl und definieren für alle rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$ mit ganzzahligem a und positivem ganzzahligen b:

$$\frac{a}{b} < \frac{1}{0}.$$

Betrachten wir einen Bruch im Baum $\frac{p}{q}$, wobei p eine ganze Zahl und q eine positive ganze Zahl ist, die aus den Brüchen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ entsteht:

$$\frac{p}{q} = \frac{a+c}{b+d},$$

wobei a, $b > 0$, c, $d > 0$ die Bedingung erfüllen:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}.$$

Wir zeigen, dass $\frac{p}{q}$ zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ liegt, also dass gilt:

$$\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}.$$

Zunächst beweisen wir:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d},$$

was äquivalent ist zu:

$$a(b+d) < (a+c)b.$$

Um dies zu zeigen, beachten wir, dass per Konstruktion gilt:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d},$$

was äquivalent ist zu:

$$ad < bc.$$

Somit folgt:

$$a(b+d) = ab + ad < ab + bc = (a+c)b.$$

Ähnlich können wir zeigen, dass

$$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d},$$

indem wir die Ungleichung wie folgt umformen:

$$(a+c)d = ad + cd < bc + cd = c(b+d).$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen.

Diese Ungleichungskette bleibt auch gültig, wenn wir $\frac{c}{d} = \frac{1}{0}$ wählen:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+0} < \frac{1}{0}.$$

Mit dieser Beobachtung können wir den Baum deutlich effizienter durchsuchen: Die gesuchte Beschriftung, nennen wir sie l, muss immer zwischen den beiden Brüchen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ des linken und rechten Bereichs liegen. Wenn eine Wurzel sich aufspaltet, entsteht ein neuer Bruch $\frac{p}{q}$ zwischen den beiden ursprünglichen Brüchen.

Fall 1 Der Bruch $\frac{p}{q}$ entspricht der gesuchten Beschriftung. Dann ist die Suche abgeschlossen.
Fall 2 $\frac{a}{b} < l < \frac{p}{q}$: In diesem Fall folgen wir der Wurzel, deren linker und rechter Bereich mit $\frac{a}{b}$ bzw. $\frac{p}{q}$ beschritet sind.
Fall 3 $\frac{p}{q} < l < \frac{c}{d}$: In diesem Fall folgen wir der Wurzel, deren linker und rechter Bereich mit $\frac{p}{q}$ bzw. $\frac{c}{d}$ beschriftet sind.

Alternative Lösung

Es gibt eine weitere elegante Möglichkeit, den Pfad zu einem Bruch im Baum zu berechnen, die auf der Idee des Kettenbruchs basiert. Hier konzentrieren wir uns nur darauf, wie man mithilfe von Kettenbrüchen einen Bruch im Baum findet. Warum diese fortgeschrittenen mathematischen Werkzeuge notwendig sind, wird nicht näher erläutert; interessierte Leser können die Begriffe „Mediant“ und „Stern-Brocot-Baum“ online recherchieren.

Ein Kettenbruch mit den Nennern $a_0, a_1, \ldots, a_n$ aus den natürlichen Zahlen ist durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

Zum Beispiel wird $\frac{22}{7}$ durch den folgenden Kettenbruch dargestellt:

$$\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}.$$

$\frac{87}{32}$ wird dargestellt durch:

$$\frac{87}{32} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}.$$

Wir zeigen, wie man den Kettenbruch einer rationalen Zahl erhält, indem wir das Beispiel $\frac{87}{32}$ betrachten. Der entscheidende Schritt besteht darin, den Zähler durch den Nenner zu teilen und den Rest zu betrachten.

$$\begin{aligned}
\frac{87}{32} &= 2 + \frac{23}{32} & &= 2 + \cfrac{1}{\cfrac{32}{23}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{9}{23}} & &= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{23}{9}}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{5}{9}}} & &= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{9}{5}}}} \\
&= \ldots & &= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}.
\end{aligned}$$

Nun können wir den Kettenbruch nutzen, um den Pfad zur entsprechenden rationalen Zahl auf sehr einfache Weise zu finden: Wenn $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ die Nenner des Kettenbruchs sind, dann muss man a_0-mal nach rechts abbiegen, dann a_1-mal nach links, dann a_2-mal nach rechts, dann a_3-mal nach links usw., und schließlich $a_n - 1$-mal entweder nach rechts, wenn n ungerade ist, oder nach links, wenn n gerade ist.

Für $\frac{22}{7}$ bedeutet dies, dass man 3-mal nach rechts und anschließend $7 - 1$-mal nach links abbiegen muss.
Für $\frac{87}{32}$ bedeutet dies, dass man 2-mal nach rechts, dann 1-mal nach links, dann 2-mal nach rechts, dann 1-mal nach links, dann 1-mal nach rechts und schließlich $4 - 1$-mal nach links abbiegen muss.

Illustration: Julia Nurit Schönnagel

13 Umgeben von Rubinen

Autor: Matthew Maat (Universität Twente)
Projekt: Combining algorithms for parity games and linear programming

Aufgabe

Irgendwo im Fernen Osten packen die Weisen ihre Geschenke, um sie dem neugeborenen König zu überreichen. Beim Beladen ihrer Kamelbeutel merken sie, dass eine der würfelförmigen Schachteln, die an einigen Ecken mit Rubinen verziert ist, kaputt ist (Abbildung 22, links).
Der Rubin mit der Markierung A ist abgefallen. Sie finden das Loch im Muster schnell, da sie ein altes östliches Dekorationsmuster verwenden, bei dem die Rubine auf der würfelförmigen Schachtel immer so platziert sind, dass

- alle Rubine durch Kanten verbunden sind,
- die Ecken ohne Rubine, sogenannte Nicht-Rubine, ebenfalls alle durch Kanten verbunden sind,
- und dies für jedes Quadrat (jede Fläche der Schachtel) gilt, d. h. alle Rubine in einem Quadrat und alle Nicht-Rubine sind über Kanten verbunden.

Im blauen Quadrat der kaputten Schachtel ist Rubin B jetzt nicht mehr mit Rubin C verbunden, was zeigt, dass die Schachtel kaputt ist.
Die Weisen stimmen darin überein, dass die alte Schachtel eine gute Möglichkeit hatte, zu erkennen, ob sie kaputt ist, aber sie war nicht perfekt: Zum Beispiel könnte man nicht erkennen, dass die Schachtel kaputt ist, wenn Rubin B statt Rubin A abgefallen wäre. Daher wollen

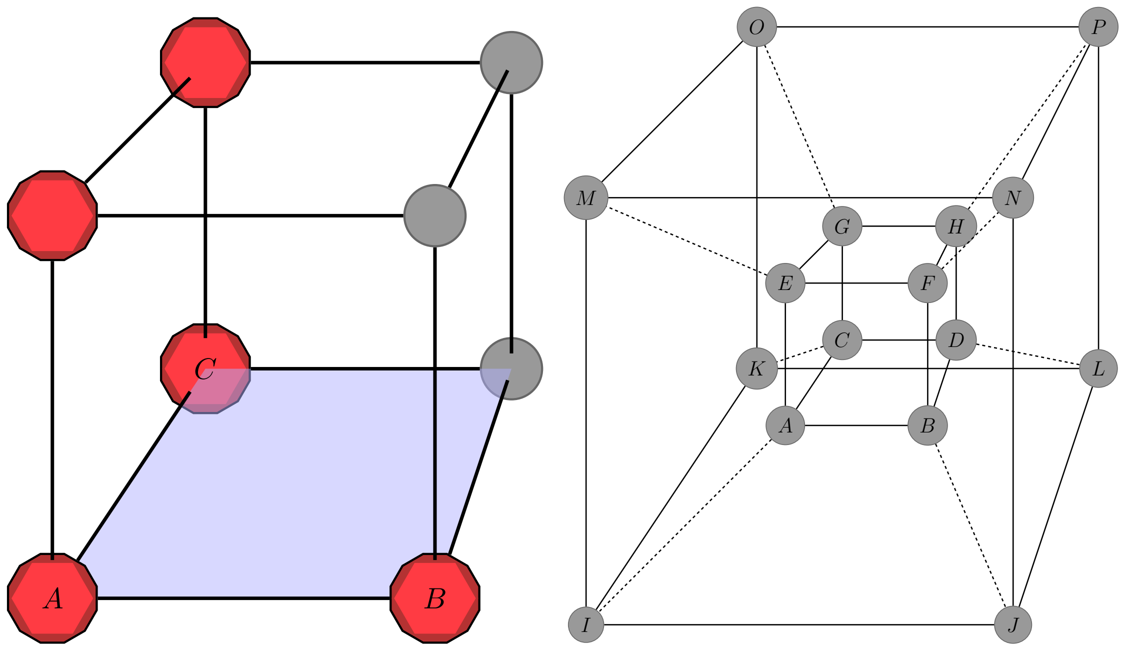


Abbildung 22: Links: Ursprüngliches Design der (jetzt kaputten) Schachtel. Die Rubine sind rot markiert. Rechts: Die Struktur eines Tesserakts.

sie die alte Schachtel nicht reparieren, sondern eine neue bauen. Dieses Mal wollen sie einen sogenannten Tesserakt verwenden (einen vierdimensionalen Hyperwürfel, siehe Beschreibung am Ende der Aufgabe). Sie möchten, dass einige Ecken des Tesserakts Rubine tragen und haben folgende Anforderungen an das Design:

1. Es gibt mindestens einen Rubin im Design.
2. Alle Rubine sind miteinander verbunden (über Folgen von Kanten), und alle Nicht-Rubine sind ebenfalls miteinander verbunden.
3. In jedem Würfel des Tesserakts gilt dasselbe: Alle Rubine sind verbunden, und alle Nicht-Rubine sind verbunden.
4. In jedem Quadrat sind ebenfalls alle Rubine verbunden und die Nicht-Rubine verbunden.
5. Es soll leicht erkennbar sein, ob ein Rubin fehlt: Wenn ein Rubin verschwindet, gibt es ein Quadrat, in dem die Rubine nicht verbunden sind (wie das blaue Quadrat in Abbildung 22, links, wenn Rubin A fehlt). Beachten Sie, dass wir die Rubine auch dann als verbunden ansehen, wenn sich auf einem Quadrat kein Rubin befindet.

Die Weisen denken lange nach und finden ein Design, das nicht nur die Anforderungen erfüllt, sondern auch die meisten Rubine aller Designs hat, die die Anforderungen erfüllen.

Frage: Wie viele Rubine befinden sich auf dem Tesserakt in ihrem Design?

Über den Tesserakt: Genauso wie man einen Würfel erstellen kann, indem man zwei Quadrate nimmt und ihre vier Ecken mit Kanten verbindet, kann man einen Tesserakt (in vier Dimensionen) erstellen, indem man zwei Würfel nimmt und die acht Eckpaare der Würfel verbindet (siehe Abbildung 22, rechts). Ein Tesserakt hat 16 Ecken ($A, B, C, \ldots, P$), 32 Kanten (zum Beispiel die Kanten AB, JN und CK), 24 Quadrate (wie $ABDC$, $IKOM$ oder $JBFN$) und 8 Würfel (zum Beispiel bilden A, B, C, D, E, F, G, H einen Würfel und A, B, E, F, I, J, M, N bilden einen Würfel). Da der Tesserakt 4-dimensional ist, handelt es sich bei der Abbildung 22 rechts nur um eine Projektion. Dementsprechend können Quadrate oder auch Würfel verzerrt in der Abbildung erscheinen.

Antwortmöglichkeiten:

1. 4 oder weniger Rubine
2. 5 Rubine
3. 6 Rubine
4. 7 Rubine
5. 8 Rubine
6. 9 Rubine
7. 10 Rubine
8. 11 Rubine
9. 12 Rubine
10. 13 oder mehr Rubine

Lösung

Die richtige Antwort lautet: 5.

Wenn man Rotation und Spiegelung ignoriert, gibt es nur ein mögliches Design, das die Anforderungen erfüllt. Es hat 8 Rubine, wie in Abbildung 23 zu sehen ist. Wenn Rubin A verschwindet, sind Rubin B und Rubin D im blauen Quadrat nicht mehr verbunden, wie in der zweiten Abbildung gezeigt.

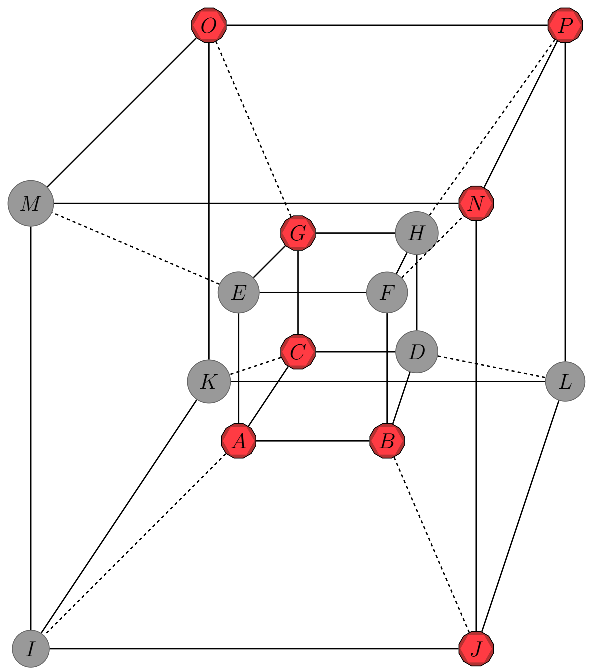
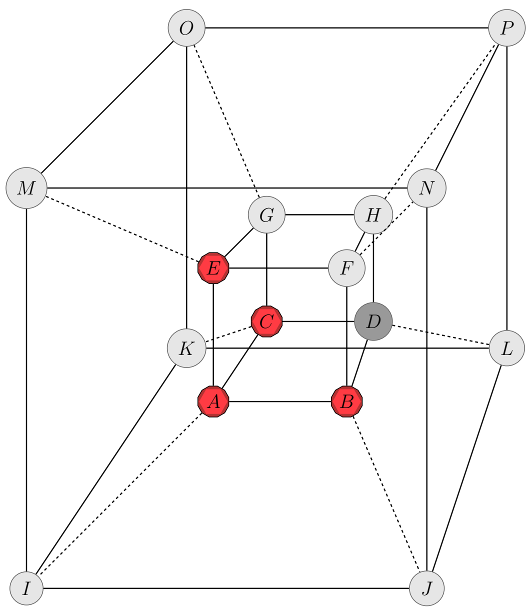


Abbildung 23: Ein mögliches Design

Nun folgt ein Beweis, dass dieses Design die einzige Lösung ist. Wir betrachten zunächst für einen festen einzelnen Rubin, zu wie vielen Rubinen er direkt mit einer Kante verbunden sein kann. Es wird sich herausstellen, dass jeder Rubin genau mit zwei anderen Rubinen verbunden sein muss. Wir werden daher alle anderen Fälle widerlegen.

- Wenn ein Rubin mit 0 anderen Rubinen verbunden ist, muss er der einzige Rubin sein, da alle Rubine miteinander verbunden sein müssen. Das Entfernen dieses Rubins würde jedoch die Menge der Rubine nicht trennen (da es dann die leere Menge wird).
- Wenn ein Rubin mit genau einem anderen Rubin verbunden ist, können wir ihn entfernen, ohne die anderen Rubine in irgendeinem Quadrat zu trennen.
- Angenommen, ein Rubin ist mit drei oder mehr anderen Rubinen verbunden. Aufgrund der Symmetrie des Tesserakts können wir annehmen, dass Rubin A mit den Rubinen B, C und E verbunden ist (siehe Abbildung 24). Nun können wir einiges über das Design sagen. Nach Regel 5 muss es ein Quadrat geben, in dem einige Rubine getrennt werden, wenn A entfernt wird, d. h. es gibt ein Quadrat, in dem die Ecken, die über eine Kante mit A verbunden sind, Rubine haben, aber nicht die verbleibende Ecke dieses Quadrats.

Daher können wir aufgrund der Symmetrie des Tesserakts annehmen, dass D keinen Rubin hat. Wir wissen auch, dass das Entfernen von B die Rubine in einem Quadrat trennt, gemäß Regel 5, also muss es ein Quadrat geben, in dem es gegenüber B keinen Rubin gibt und zwei Rubine mit B verbunden sind. Da es einen Rubin bei E gibt, kann es nicht das Quadrat $ABFE$ sein, und da auch kein Rubin bei D ist, muss es entweder das Quadrat $ABJI$ oder $BJNF$ sein. In beiden Fällen muss ein Rubin bei J sein. Mit der gleichen Logik für den Fall, dass Rubin C entfernt wird, muss ein Rubin bei K sein. Dann können in dem Würfel, der aus den Ecken A, B, C, D, I, J, K, L besteht, die Nicht-Rubine nicht getrennt werden, also ist jeder Nicht-Rubin mit D verbunden, daher muss I ein Rubin sein. Dann ist das einzige Quadrat, in dem das Entfernen von B die Rubine noch trennen kann, das Quadrat $BJNF$, also ist N kein Rubin und F ist ein Rubin. Mit der gleichen Logik für C ist G ein Rubin und O ist kein Rubin. Nun ist das einzige Quadrat, in dem das Entfernen von F die Rubine trennen kann, im Quadrat $BDHF$, daher muss H ein Rubin sein. Da N und D mit Nicht-Rubinen verbunden sein müssen, müssen L und P Nicht-Rubine sein. Nun haben wir alle Quadrate, die Rubin J enthalten, vollständig festgelegt. Wenn wir jedoch J entfernen, werden die Rubine in keinem Quadrat getrennt. Dies ist also nicht möglich.



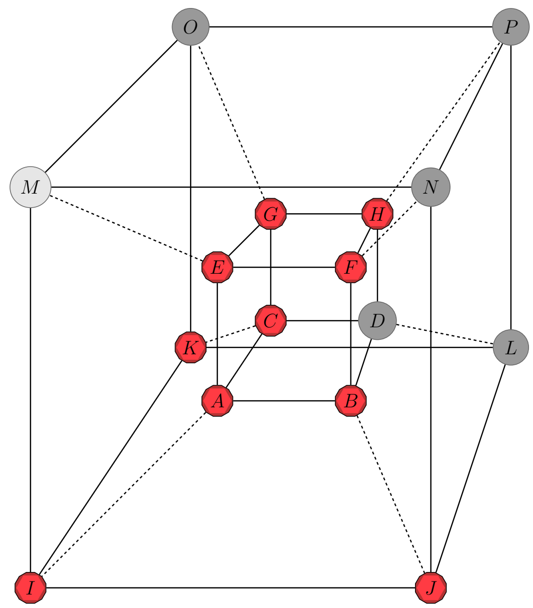


Abbildung 24: Rot bedeutet Rubin, dunkelgrau bedeutet kein Rubin, und hellgrau ist unbekannt. Links: A hat drei Nachbarn und ein Quadrat, in dem es die Rubine trennt. Rechts: Implizierte Rubine und Nicht-Rubine, die wir aus dem linken Bild ableiten können.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass jeder Rubin direkt mit genau zwei anderen Rubinen verbunden ist, sodass sie einen einzigen Zyklus bilden müssen (da sie auch miteinander verbunden sein müssen). Mit einem Zyklus ist Folgendes gemeint: Man beginnt bei einem Rubin und verwendet eine Kante, um zu einem anderen Rubin zu gelangen, der direkt über diese Kante mit ihm verbunden ist. Nun gibt es nur eine Möglichkeit, zu einem noch nicht besuchten Rubin über eine Kante zu gelangen. Dieser Prozess setzt sich fort, bis jeder Rubin besucht wurde und es eine Kante gibt, mit der man vom letzten Rubin zurück zum Rubin am

Anfang gelangen kann.

Nun besteht jeder Zyklus in einem Tesserakt aus einer geraden Anzahl von Rubinen (man kann dies wie folgt sehen: Jedes Mal, wenn man entlang einer Kante in eine Richtung geht, muss man irgendwann wieder in die entgegengesetzte Richtung gehen, um zum Ausgangspunkt zu gelangen). Ein Zyklus von 4 Rubinen ist ein Quadrat, in dem man einen Rubin entfernen kann, ohne sie zu trennen, was Regel 5 widerspricht. Jeder Zyklus von 6 Rubinen sieht wie der Zyklus $ABDHGE$ aus, aber dort sind die Nicht-Rubine C und F im Würfel A, B, C, D, E, F, G, H nicht miteinander verbunden. Ein Zyklus aus 8 Rubinen ist, wie wir bereits gesehen haben, möglich. Jeder Zyklus von 10 oder mehr Rubinen ist nicht möglich. Dies kann wie folgt gezeigt werden:

Behauptung: Jeder Zyklus kann maximal 4 Rubine in einem Würfel haben.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass 5 oder mehr Rubine in einem Würfel sein können und zeigen dann, dass dies zu einem Widerspruch führt. Um den Beweis zu veranschaulichen, betrachten wir den Würfel $ABCDEFGH$. Es können in keinem Quadrat vier Rubine sein, da jeder weitere Rubin immer dazu führt, dass einer der Rubine drei Kanten zu anderen Rubinen hat. Daher können wir aufgrund der Symmetrie annehmen, dass das Quadrat $ABCD$ drei Rubine enthält und das Quadrat $EFGH$ zwei oder drei Rubine enthält.
Die Rubine im Quadrat $EFGH$ müssen über dessen Kanten miteinander verbunden sein. Im Fall von drei Rubinen ist dies offensichtlich gegeben. Für den Fall von zwei Rubinen ergibt sich die Verbindung aufgrund von Regel 4, die vorschreibt, dass die Nicht-Rubine innerhalb dieses Würfels miteinander verbunden sein müssen. In beiden Fällen bleibt es jedoch unmöglich, die übrigen Rubine so zu platzieren, dass weder die Verbindung der Nicht-Rubine im Würfel unterbrochen wird noch ein Rubin mit drei Kanten an andere Rubine anschließt. □

Das Design muss also aus einem Zyklus von 8 Rubinen bestehen. Es gibt drei Arten von Zyklen mit 8 Rubinen: einen wie $ABJNPOGC$, der die richtige Lösung in Abbildung 23 ist, einen wie $ABJLPOGC$ (der nicht korrekt ist, da L und C im Quadrat $CDLK$ nicht verbunden sind) und der letzte Typ hat 5 Rubine im gleichen Würfel ($ABJLPHGC$ oder $ABJNPHGC$), aber dann sind B und H im Quadrat $BDHF$ nicht miteinander verbunden. Daher ist das Design bis auf Symmetrien des Tesserakts eindeutig.

Illustration: Friederike Hofmann

14 Schlag den Staab

Autor: Silas Rathke (BMS)

Aufgabe

Mathilda ist begeistert: Ihre Lieblingsshow „Schlag den Staab“ kommt wieder ins Fernsehen. Dort tritt ein Kandidat in 100 Spielen gegen den Fernsehstar Evan Staab an.[1] Jedes Spiel gewinnt entweder der Kandidat oder Evan Staab; ein Unentschieden ist nicht möglich. Für das erste Spiel gibt es einen Punkt für den Gewinner, für das zweite Spiel zwei Punkte und so weiter, sodass der Gewinner des letzten Spiels 100 Punkte erhält. Diese Punkte werden aufaddiert und wer am Ende die meisten Punkte hat, gewinnt die Show. Sollten am Ende Kandidat und Evan Staab dieselbe Punktzahl haben, kommt es zu einem Stechen.
Mathilda liebt es, wenn es zu einem Stechen kommt, weil es dann besonders spannend ist. Nach jedem Spiel wird der Zwischenstand eingeblendet und da überlegt sich Mathilda immer, ob es rechnerisch noch möglich ist, dass es am Ende zu einem Stechen kommt. Manchmal ist ein Stechen bis zum letzten Spiel möglich, meist ist jedoch schon viel früher klar, wer der Sieger ist. Sei k die kleinste positive ganze Zahl, sodass es nach dem k-ten Spiel passieren kann, dass es nicht mehr möglich ist, dass es zu einem Stechen kommt. Welche Einerziffer hat k im Dezimalsystem?

[1] In der deutschen Version sind es nur 15 Spiele, aber da eine Polarnacht am Nordpol nun mal sechs Monate lang dauert, sind Late-Night-Shows dort entsprechend länger...

Hinweis:
Die Gauß'sche Summenformel lautet

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 0

Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Wir zeigen, dass $k = 68$ ist. Dafür konstruieren wir zunächst Fälle, in denen für $k \geq 68$ **kein** Stechen möglich ist, und anschließend zeigen wir, wie es für $k = 67$ immer zu einem Stechen kommen kann. Daraus lässt sich dann schlussfolgern, dass $k = 68$ die Lösung ist. Denn wäre $k < 68$, dann würde es ein Szenario geben, sodass es nach Spiel k keine Möglichkeit mehr für ein Stechen gibt. Dann wäre es aber auch unmöglich, nach dem Spiel 67 noch ein Stechen zu erwirken. Das steht im Widerspruch dazu, dass wir zeigen, dass es nach dem Spiel 67 immer eine Möglichkeit gibt, ein Stechen zu erreichen.

1. Für $k \geq 68$ kann es passieren, dass es zu keinem Stechen kommen kann

Die Anwendung der Gauß'schen Summenformel ergibt, dass es insgesamt 5050 Punkte zu gewinnen gibt. Damit kommt es zu einem Stechen, wenn beide Spieler 2525 Punkte haben. Dafür gehen wir folgende Fälle durch:

- Wenn $k \geq 71$ und ein Spieler die ersten 71 Spiele gewonnen hat, hat er laut der Gauß'schen Summenformel 2.556 Punkte, womit er bereits der Sieger ist.
- Wenn $k = 70$ und ein Spieler die ersten 70 Spiele gewonnen hat, hat er laut der Gauß'schen Summenformel 2.485 Punkte, womit ihm 40 Punkte für ein Stechen fehlen. Jedoch kann man ab dem 71 Spiel nur noch mehr als 71 Punkte gewinnen.
- Wenn $k = 69$ und ein Spieler die ersten 69 Spiele gewonnen hat, hat er laut der Gauß'schen Summenformel 2.415 Punkte, womit ihm 110 Punkte für ein Stechen fehlen. Jedoch kann man ab dem 70 Spiel, keine zwei Runden gewinnen und dabei weniger als 141 Punkte gewinnen. Mit einem Spiel dagegen können maximal 100 Punkte gewonnen werden und wir schlussfolgern, dass es auch hier zu keinem Stechen mehr kommen kann.
- Wenn $k = 68$ und ein Spieler die ersten 68 Spiele bis auf das Spiel 21 gewonnen hat, dann hat er laut der Gauß'schen Summenformel 2.325 Punkte, womit ihm 200 Punkte für ein Stechen fehlen. Jedoch kann man ab dem 69. Spiel, keine drei Runden gewinnen und weniger als 210 Punkte gewinnen. Mit zwei Spielen sind dagegen maximal $100+99 = 199$ Punkte zu gewinnen und wir schlussfolgern, dass es auch hier zu keinem Stechen mehr kommen kann.

2. Für $k < 68$ besteht immer eine Möglichkeit, dass es zu einem Stechen kommt.

Wir betrachten den Punktestand P eines der beiden Spieler nach 67 gespielten Spielen, und wollen zeigen, dass es von P aus immer eine Möglichkeit gibt, auf 2525 Punkte zu kommen. Nach der Gauß'schen Summenformel gilt zunächst $P \leq \frac{67 \cdot 68}{2} = 2278$. Unser Vorgehen dabei erläutern wir zunächst intuitiv. Die minimale Punktzahl, die mit drei weiteren Siegen erspielt werden kann, beträgt $68+69+70$ bzw. $(67+1)+(67+2)+(67+3)$ und die maximale beträgt $100+99+98$ bzw. $100+(100-1)+(100-2)$. Ausgerechnet ergeben sich eine minimale Punktzahl von 207 und eine maximale von 297. Ebenfalls lassen sich alle Punktzahlen dazwischen erreichen (wird später bewiesen). Ausgehend von 2525 ließe sich also mit drei weiteren Spielen ein Stechen erreichen, wenn $2525 - 297 \leq P \leq 2525 - 207$ gilt, also wenn $2228 \leq P \leq 2318$. Übrig bleiben also noch die Fälle $P \leq 2228$ zu überprüfen. Hierzu betrachten wir die minimale und maximale Anzahl an Punkten, die durch vier weitere gewonnene Spiele erzielt werden können. Sie betragen

$$\begin{aligned}(67+1)+(67+2)+(67+3)+(67+4) &= 278 \text{ und,}\\ 100+(100-1)+(100-2)+(100-3) &= 394.\end{aligned}$$

Auch hier lassen sich alle Punktzahlen dazwischen erreichen (wird später bewiesen). Damit werden die Fälle $2525 - 394 \leq P \leq 2525 - 278$ abgedeckt, also $2131 \leq P \leq 2247$. Wir können beobachten, dass die Intervalle für 3 und 4 weitere gewonnene Spiele sich überlappen. Gilt dies auch für die Intervalle von 4 und 5 weiteren gewonnenen Spielen und generell für die Intervalle für l und $l+1$ weitere gewonnene Spiele? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir überlegen, wann die minimale Punktzahl aus $l+1$ weiteren gewonnenen Spielen die maximale Punktzahl aus l gewonnenen Spielen übersteigt. Dann können wir alle Punkteständе P abdecken, die einen Abstand zur 2525 haben, der zwischen der minimalen Punktzahl von 3 weiteren Spielen und der maximalen Punktzahl von $l+1$ weiteren Spielen liegt. Die Antwort liefert das folgende Lemma:

Lemma 1. *Für $3 \leq l < 30$ gilt*

$$(67+1)+(67+2)+\ldots+(67+(l+1)) \leq 100+(100-1)+\ldots+(100-(l-1)).$$

Beweis. Als erstes vereinfachen wir die linke Seite der Ungleichung

$$\begin{aligned}(67+1)+\ldots+(67+(l+1)) &= (l+1)\cdot 67 + (1+2+\ldots+(l+1))\\ &= (l+1)\cdot 67 + \frac{(l+1)(l+2)}{2}\\ &= \frac{1}{2}\cdot l^2 + \frac{137}{2}\cdot l + 68.\end{aligned}$$

Ähnlich erhalten wir für die rechte Seite:

$$\begin{aligned}100+(100-1)+\ldots+(100-(l-1)) &= l\cdot 100 - (1+2+\ldots+(l-1))\\ &= l\cdot 100 - \frac{(l-1)\cdot l}{2}\\ &= -\frac{1}{2}\cdot l^2 + \frac{201}{2}\cdot l.\end{aligned}$$

Insgesamt interessieren wir uns also für die Lösungen folgender quadratischer Ungleichung:

$$\frac{1}{2}\cdot l^2 + \frac{137}{2}\cdot l + 68 \leq -\frac{1}{2}\cdot l^2 + \frac{201}{2}\cdot l.$$

Durch Umstellen der Ungleichung erhalten wir

$$l^2 - 32\cdot l + 68 \leq 0.$$

Die linke Seite entspricht der Funktionsgleichung einer nach oben geöffneten Parabel. Wenn wir die Nullstellen dieser Parabel l_1 bzw. l_2 nennen, so erfüllen alle Zahlen zwischen l_1 und l_2

die Ungleichung. Die Nullstellen der Funktionsgleichung lassen sich dabei mit der p-q-Formel oder der abc-Formel berechnen:

$$l_1 = 16 - \sqrt{188} < 16 - 13 = 3, \quad \text{und} \quad l_2 = 16 + \sqrt{188} > 16 + 13 = 29.$$

Damit ist die Aussage bewiesen. □

Nach obiger Überlegung können also alle Punktestände mit einem Abstand zur 2525 zwischen der minimalen Punktzahl von 3 weiteren Spielen und der maximalen Punktzahl von 30 weiteren Spielen abgedeckt werden. Die maximale Punktzahl aus 30 weiteren Spielen ist hierbei

$$100 + (100 - 1) + \ldots + (100 - 29) = 30 \cdot 100 - \frac{29 \cdot 30}{2} = 2565.$$

Damit sind alle Punktestände P abgedeckt mit $2525 - 2565 \leq P \leq 2525 - 207$ bzw. $-40 \leq P \leq 2318$. Wir können also schlussfolgern, dass es für alle möglichen Punktzahlen P einem der beiden Spieler möglich ist, ein Unentschieden zu erreichen, wenn 67 Spiele gespielt worden sind. Damit ist es natürlich auch möglich, ein Unentschieden zu erreichen, wenn weniger als 67 Spiele gespielt wurden.

Wir zeigen nun noch, dass jede Punktzahl zwischen der minimalen und maximalen Punktzahl aus l weiteren Spielen, nach dem k-ten gespielten Spiel, erreicht werden kann:

Lemma 2. *Sei k die Anzahl der schon gespielten Spiele und sei l die Anzahl weiterer Spiele, die gewonnen wurden. Sei weiter m die minimale Anzahl an Punkten, die mit weiteren l gewonnenen Spielen erreicht werden kann, und M die maximale Anzahl. Dann gibt es für jede Punktzahl P mit $m \leq P \leq M$ genau l Spiele mit Punktzahlen $s_1, s_2, \ldots, s_l$ sodass*

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_l = P.$$

Beweis. Falls $P = m$ ist, ist die Aussage offensichtlich richtig. Nun nehmen wir an, dass $P \geq m$, aber $P < M$ ist und wir die Aussage für P schon bewiesen haben (warum das gerechtfertigt ist, zeigen wir später). Wir wollen nun die Aussage für $P+1$ zeigen. Falls $P+1 = M$ gilt, dann gilt die Aussage offensichtlich auch. Ansonsten betrachten wir Punktzahlen $s_1, s_2, \ldots, s_l$, die in der Summe die Punktzahl P ergeben. Diese Punktzahlen muss es geben, da wir angenommen haben, dass die Aussage für P gilt. Durch eventuelles Umnummerieren können wir außerdem $s_l < s_{l-1} < \ldots < s_2 < s_1$ voraussetzen. Da $P + 1 \neq M$ ist, gibt es ein s_i, wobei $1 \leq i \leq l$, sodass $s_i < 100 - (i - 1)$. Ansonsten wäre nämlich

$$s_1 + \ldots + s_l \geq 100 + \ldots + (100 - (l - 1)) \geq M.$$

Sei i der kleinste Index für den das stimmt. Dann ist entweder $i = 1$ und $s_1 + 1, s_2, \ldots, s_l$ ergibt in der Summe $P + 1$. Andernfalls ist $i \neq 1$ und es gilt $s_i + 1 < s_{i-1}$ nach der Voraussetzung, dass i der kleinste Index ist. In diesem Fall ist die Summe aus $s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i + 1, s_{i+1}, \ldots, s_l$ gleich $P + 1$ und die Aussage gilt auch in diesem Fall.
Da wir bereits wissen, dass die Aussage für $P = m$ gilt, können wir mit obigem Argument schlussfolgern, dass sie auch für $m + 1$ gilt. Damit können wir dann wiederum schlussfolgern, dass die Aussage für $m + 2$ gilt. Dieses Argument lässt sich iterativ so lange anwenden, bis wir M erreicht haben. Die Aussage gilt somit für alle Punktzahlen zwischen m und M. Diese Beweismethode wird formal als Induktion bezeichnet. □

Illustration: Friederike Hofmann

15 Logistische Herausforderungen

Autorin: Anouk Beursgens
Projekt: Vorhersage der Nachfrage nach Nachsorge in Krankenhäusern

Aufgabe

Weihnachten steht wieder vor der Tür, und die Elfen sind fleißig damit beschäftigt, alle Geschenke vorzubereiten! Aufgrund der enormen Anzahl an Geschenken beginnen die Elfen drei Wochen im Voraus mit der Lieferung. Das bedeutet, dass sie dieses Jahr in den Wochen vom 2.–8. Dezember (Woche 1), 9.–15. Dezember (Woche 2) und 16.–22. Dezember (Woche 3) Geschenke ausliefern. Je näher Weihnachten rückt, desto mehr Geschenke werden pro Woche ausgeliefert. Allerdings wird nicht jeden Tag die gleiche Anzahl an Geschenken geliefert. Es gibt rote und grüne Geschenke. Das Verhältnis zwischen roten und grünen Geschenken hängt nur vom Wochentag ab und bleibt während des dreiwöchigen Zeitraums gleich.

Um zu planen, wann die Elfen arbeiten müssen, möchte der Oberelf die Anzahl der Lieferungen pro Tag vorhersagen. Er hat die Daten zur Anzahl der Geschenke aus dem letzten Jahr, die in Tabelle 1 angegeben sind (siehe nächste Seite). Glücklicherweise sind Menschen Gewohnheitstiere, sodass die Anzahl der Geschenkelieferungen in diesem Jahr zwei Regeln folgt:

1. Die Abweichung der Anzahl der Geschenke, die an einem Wochentag geliefert werden, von der durchschnittlichen Anzahl der Geschenke pro Tag in dieser Woche ist dieselbe wie im letzten Jahr. Zum Beispiel, wenn durchschnittlich drei Geschenke geliefert werden

und an einem Montag ein Geschenk geliefert wird, dann beträgt die Abweichung für Montag -2.

2. Der Anteil an roten Geschenken, die an einem Wochentag (im Verhältnis zur Gesamtanzahl der an diesem Tag gelieferten Geschenke) geliefert werden, bleibt gleich wie im letzten Jahr. Zum Beispiel, wenn an einem Montag ein rotes und zwei grüne Geschenke geliefert wurden, dann beträgt der Anteil der roten Geschenke an diesem Montag 1/3.

	(Woche 1)			(Woche 2)			(Woche 3)		
Tag	Datum	Rot	Grün	Datum	Rot	Grün	Datum	Rot	Grün
Mo	04.12.	2	2	11.12.	5	5	18.12.	11	11
Di	05.12.	3	3	12.12.	6	6	19.12.	12	12
Mi	06.12.	3	3	13.12.	6	6	20.12.	12	12
Do	07.12.	4	4	14.12.	7	7	21.12.	13	13
Fr	08.12.	3	6	15.12.	5	10	22.12.	9	18
Sa	09.12.	2	1	16.12.	6	3	23.12.	14	7
So	10.12.	5	1	17.12.	10	2	24.12.	20	4

Tabelle 1: Anzahl der roten und grünen Geschenke, die an jedem Tag während eines dreiwöchigen Zeitraums im letzten Jahr 2023 geliefert wurden.

Zum Beispiel können wir aus Tabelle 1 folgende Muster erkennen:

- An jedem der drei Wochen wurden am Dienstag zwei Geschenke mehr geliefert als am Montag,
- an jedem der drei Montage waren die Hälfte der gelieferten Geschenke rot, während an jedem Freitag nur ein Drittel rot war,
- in Woche 1 wurden insgesamt 42 Geschenke geliefert, in Woche 2 waren es 84.

Dieses Jahr hat sich jedoch etwas geändert: Weihnachten ist populärer geworden! Der Oberelf weiß daher, dass sich die Anzahl der Geschenke pro Woche während der Lieferwochen jedes Mal verdreifacht. Außerdem weiß er, dass am Montag der Woche 1 (2. Dezember) 8 rote und 8 grüne Geschenke geliefert werden müssen. Wie viele rote und grüne Geschenke müssen am Samstag der Woche 3 (21. Dezember) geliefert werden?

Anwortmöglichkeiten:

1. 56 rote Geschenke und 28 grüne Geschenke
2. 108 rote Geschenke und 108 grüne Geschenke
3. 108 rote Geschenke und 36 grüne Geschenke
4. 84 rote Geschenke und 21 grüne Geschenke
5. 72 rote Geschenke und 26 grüne Geschenke
6. 90 rote Geschenke und 18 grüne Geschenke
7. 106 rote Geschenke und 53 grüne Geschenke
8. 108 rote Geschenke und 54 grüne Geschenke
9. 56 rote Geschenke und 56 grüne Geschenke
10. 30 rote Geschenke und 15 grüne Geschenke

Projektbezug:

Die Vorhersage der Nachfrage nach Nachsorge in Krankenhäusern ist ein wichtiges Thema in diesem Projekt. Einer der Ansätze, die wir verwenden, ist die Zeitreihenanalyse. Bei der Zerlegung von Zeitreihen teilen wir die Zeitreihe (z. B. die Anzahl der Nachsorgeanfragen pro Tag oder die Anzahl der pro Tag gelieferten Geschenke) in einen Trend, eine saisonale Komponente und einen Fehlerterm auf. Der Trend zeigt, wie sich die Zeitreihe über längere Zeiträume verhält, während eine wöchentliche Saisonalität zeigt, wie sie pro Wochentag schwankt. Neben der wöchentlichen Saisonalität könnte es auch tägliche Saisonalität (z. B. in der Anzahl der Patienten, die pro Stunde in der Notaufnahme eines Krankenhauses eintreffen) oder jährliche Saisonalität (z. B. in der Anzahl der verkauften Eiscremes pro Monat) geben.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 7.

Aus Tabelle 1 können wir zwei nützliche Muster ableiten.

Erstens bestimmen wir die Abweichung der täglichen Anzahl der Geschenke von der Wochenanzahl. In Woche 1 gibt es insgesamt 42 Geschenke, was bedeutet, dass im Durchschnitt 42/7 = 6 Geschenke pro Tag geliefert werden. Wenn wir uns Montag ansehen, hatten wir 2+2=4 Geschenke, was 2 weniger als der tägliche Durchschnitt für diese Woche ist. Wenn wir dies für alle Tage der Woche 1 berechnen, erhalten wir die folgende wöchentliche Saisonalität:

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
-2	0	0	+2	+3	-3	0

Dieses Abweichungsmuster gilt tatsächlich auch für Woche 2 und Woche 3.

Zweitens erkennen wir aus den Daten des letzten Jahres den folgenden Anteil an roten Geschenken für jeden Wochentag der Woche 1:

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
1/2	1/2	1/2	1/2	1/3	2/3	5/6

Außerdem gilt dasselbe Muster für Woche 2 und Woche 3.

Es ist gegeben, dass am Montag der Woche 1 dieses Jahr 16 Geschenke (8 rote + 8 grüne) geliefert werden. Aus dem Muster des letzten Jahres wissen wir, dass dies 2 weniger als der Wochenmittelwert ist. Daher haben wir in Woche 1 dieses Jahres im Durchschnitt 18 Geschenke pro Tag, und somit $7 \times 18 = 126$ Geschenke insgesamt. Es ist angegeben, dass sich diese Anzahl an Geschenken pro Woche jedes Mal verdreifacht. In Woche 2 haben wir also $126 \times 3 = 378$ Geschenke und in Woche 3 insgesamt $378 \times 3 = 1134$ Geschenke. Das bedeutet, dass in der dritten Woche der Durchschnitt $1134/7 = 162$ Geschenke pro Tag beträgt. Mit den täglichen Abweichungen vom Durchschnitt, wie aus den Daten des letzten Jahres abgeleitet, haben wir am Samstag, den 21. Dezember, $162 - 3 = 159$ Geschenke. Mit dem Verhältnis zwischen roten und grünen Geschenken aus dem letzten Jahr ergibt sich $159 \times 2/3 = 106$ rote und 53 grüne Geschenke.

Illustration: Zyanya Santuario

16 Die Zahlen von Nazareth

Autor: Matthew Maat (Universität Twente)
Projekt: Combining algorithms for parity games and linear programming

Aufgabe

Im kleinen Dorf Nazareth, siehe Abbildung 25(i), gibt es nur sechs Straßen. Es ist möglich, einen *Kreis* zu gehen, das heißt, man läuft über eine Reihe von Straßen und kehrt zum Ausgangspunkt zurück (ohne eine Kreuzung zweimal zu überqueren). Zum Beispiel bilden die Straßen a, d und f einen Kreis. Wir bezeichnen diesen Kreis als (adf). Insgesamt gibt es sieben Kreise, die anderen sind $(bde), (cef), (abc), (adec), (abef)$ und $(bcfd)$. Beachte, dass die Startposition eines Kreises keine Rolle spielt, z. B. werden die Kreise (adf) und (dfa) als derselbe Kreis betrachtet.

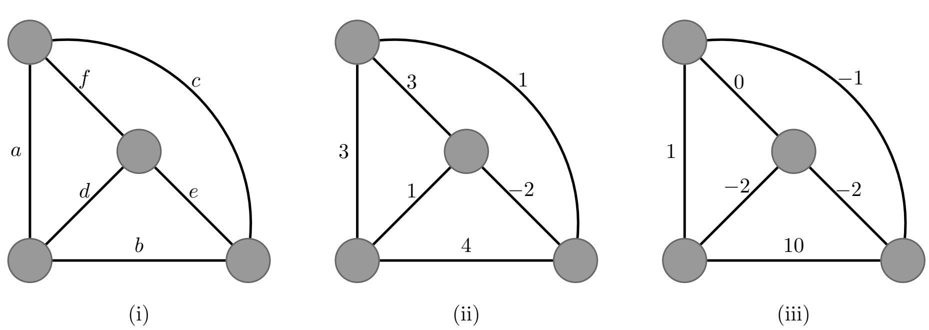


Abbildung 25: Die Straßen von Nazareth

Nun spielen Joseph und Maria ein Spiel namens „Nummeriere die Straßen“. Jede Runde beginnt damit, dass der Dorfälteste eine Menge von Kreisen bekannt gibt. Maria und Josef haben eine Karte des Dorfs. Sie schreiben jeweils sechs ganze Zahlen auf die eingezeichneten Straßen in der Karte.

Joseph erhält einen Punkt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Für jeden Kreis, den der Älteste vorgab, ist die größte Zahl, die Joseph schrieb, gerade.
- Für jeden Kreis, den der Älteste nicht vorgab, ist die größte Zahl, die Joseph schrieb, ungerade.

Maria erhält einen Punkt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- In jedem Kreis, den der Älteste ausrief, ist die Summe der Zahlen, die Maria schrieb, mindestens 0.
- In allen anderen Kreisen ist die Summe der Zahlen, die Maria schrieb, kleiner als 0.

Joseph und Maria spielen eine Proberunde:
Die Abbildung 25 zeigt Zahlen, welche Joseph (ii) und Maria (iii) geschrieben haben, um einen Punkt in der Runde zu erzielen, in der der Älteste die Straßen $(bde), (abc), (bcfd)$ und $(abef)$ ausgerufen hätte. Im Kreis (bde), den der Älteste ausgerufen hat, ist die größte Zahl 4, die tatsächlich gerade ist. Es lässt sich überprüfen, dass die beiden Eigenschaften auch für die anderen sechs Kreise zutreffen. Bei Maria ist die Summe der Zahlen im Kreis (bde) $10 - 2 - 2 = 6$, was sogar größer als 0 ist. Es lässt sich ebenfalls überprüfen, dass die anderen sechs Kreise ebenfalls korrekt sind.
Im eigentlichen Spiel werden drei Runden gespielt. Nach jeder Runde streichen Joseph und Maria ihre alten Zahlen durch und überlegen sich erneut Zahlen für die nächste Runde. Die erzielten Punkte werden addiert. Der Älteste gibt die folgenden Mengen von Kreisen vor:

Runde 1: (adf) und (cef)

Runde 2: $(abc), (bde), (cef)$ und (adf)

Runde 3: $(abef)$ und $(bcfd)$

Angenommen, Joseph und Maria spielen bestmöglich. Sei J die Gesamtsumme der Punkte von Joseph und M die von Maria. Was ist das Endergebnis, geschrieben als $J - M$?

Antwortmöglichkeiten:

1. 0 – 3
2. 1 – 3
3. 1 – 1
4. 1 – 2
5. 3 – 3
6. 2 – 1
7. 2 – 2
8. 2 – 3
9. 3 – 0
10. 3 – 1

Projektbezug:

Joseph versucht, etwas Ähnliches wie ein Paritätsspiel zu konstruieren, dessen gewinnende Kreise mit den vom Ältesten vorgegebenen Kreisen übereinstimmen. Maria konstruiert etwas, das einem Mean-Payoff-Spiel ähnelt, mit den vorgeschriebenen gewinnenden Kreisen. Es gibt interessante Verbindungen zwischen diesen beiden Spieltypen.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 4.

Zunächst geben wir Beispiele für die Runden an, in denen Maria oder Joseph einen Punkt bekommen können. Im Anschluss zeigen wir, dass es für beide nicht möglich ist noch weitere Punkte zu erzielen.

In Runde 1 erzielt Joseph einen Punkt mit den Zahlen in Abbildung 26(i), und Maria erzielt einen Punkt mit der Lösung in Abbildung 26(ii). In Runde 3 erzielt Maria einen zweiten Punkt mit Abbildung 26(iii). Keine weiteren Punkte können erzielt werden.

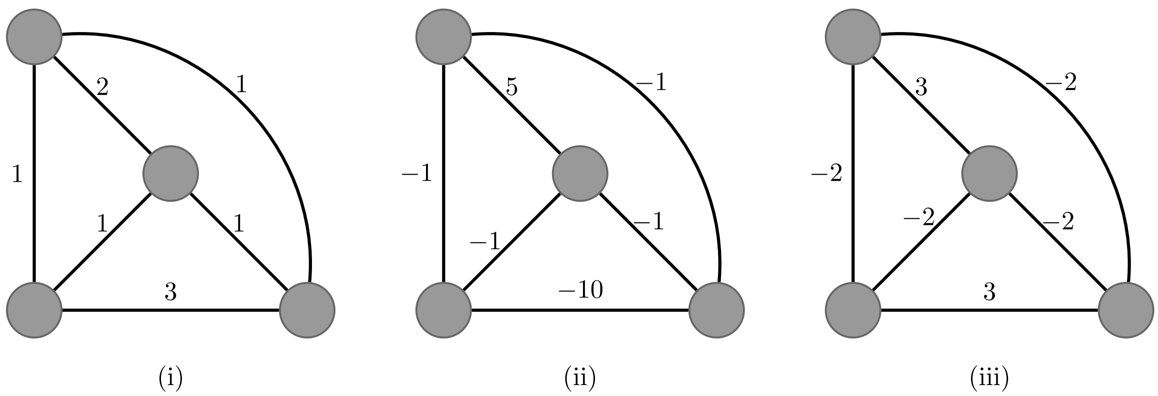


Abbildung 26: Mögliche Lösungen für Runde 1 und 3.

Erstens ist es in Runde 2 und 3 so, dass jede Straße sowohl in einem Kreis enthalten ist, der *in* der Vorgabe liegt, als auch in einem Kreis, der *nicht in* der Vorgabe liegt. Es ist daher unmöglich, dass Joseph einen Punkt erzielt: Wenn Joseph einen Punkt erzielen könnte, was wäre dann die größte Zahl, die er aufschreiben könnte? Diese Zahl wäre die größte in jedem Kreis, der sie enthält, also müsste sie gerade sein, um die größte Zahl eines Kreises gerade zu machen; aber auch ungerade, um die größte Zahl eines anderen Kreises ungerade zu machen, was natürlich nicht möglich ist. Joseph kann also nicht mehr als 1 Punkt erzielen. Schließlich zeigen wir, dass Maria in Runde 2 keinen Punkt erzielen kann, indem wir einen Widerspruch herbeiführen. Die Vorgabe des Ältesten besteht genau aus den Kreisen mit 3 Straßen. Da die Summe der Zahlen auf diesen Kreisen mindestens 0 ist, gilt das Gleiche, wenn wir alle diese vier Kreise zusammenfassen:

$$(a+b+c)+(b+d+e)+(c+e+f)+(a+d+f) \geq 0$$

Alle Kreise mit 4 Straßen sind nicht in der Vorgabe, daher sind die Summen ihrer Zahlen jeweils kleiner als 0, und das Gleiche gilt für die Summe der einzelnen Summen:

$$(a+b+e+f)+(b+c+f+d)+(a+d+e+c) < 0$$

Beachte, dass der Term auf der linken Seite beider Ungleichungen derselbe ist. Daher erhalten wir eine Kette von Ungleichungen

$$0 \leq 2a+2b+2c+2d+2e+2f < 0,$$

was unmöglich ist. Also kann Maria keinen Punkt erzielen.

Bemerkung: Der arme Joseph kann dieses Spiel nie gewinnen, da es eine Verbindung zwischen Paritätsspielen und Mean-Payoff-Spielen gibt. Wenn Joseph in einer Runde mit einer bestimmten Anordnung von Zahlen einen Punkt erzielt, kann Maria einfach $(-5)^i$ schreiben, wo Joseph i schrieb, und ihre Anordnung erzielt ebenfalls einen Punkt.

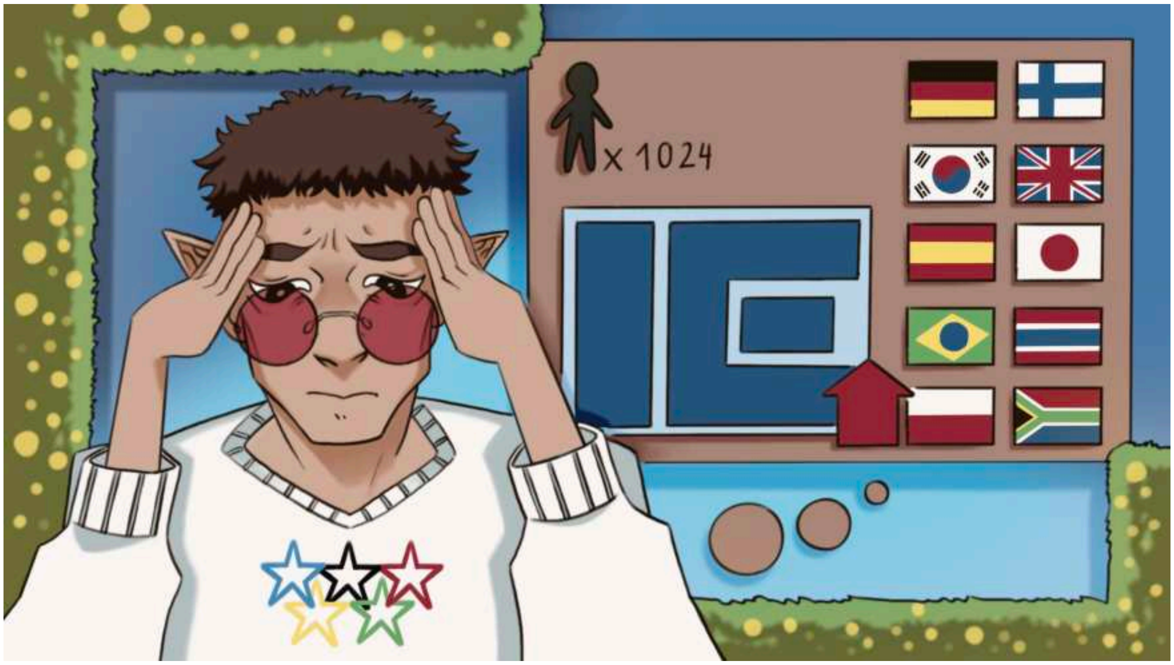


Illustration: Julia Nurit Schönnagel

17 Das Olympische Unterbringungsdilemma

Autoren: Silas Rathke, Yamaan Attwa

Aufgabe

In diesem Jahr werden die Olympischen Arktischen Spiele am Nordpol stattfinden. 1.024 Athleten aus dem gesamten gefrorenen Norden werden in verschiedenen Sportarten antreten.

Otto, der Unterbringungsorganisator der Veranstaltung, ist dafür verantwortlich, die Athleten unterzubringen. Dabei muss er eine strikte Vorgabe des Arktischen Olympischen Komitees beachten: Wenn zwei (unterschiedliche) Athleten keine gemeinsame Sprache sprechen, dürfen sie nicht zusammen in einem Haus untergebracht werden. Um diese Regel einzuhalten, fragt Otto im Voraus alle Athleten, welche Sprachen sie sprechen können.
Otto macht einige interessante Feststellungen:

- Es gibt genau 10 Sprachen (L_1 bis L_{10}), die gesprochen werden.
- Jede mögliche Kombination dieser 10 Sprachen wird von genau einem Athleten gesprochen.
  Das heißt, dass es zum Beispiel genau einen Athleten gibt, der nur die Sprache L_1 spricht, genauso gibt es genau einen Athleten, der nur die Sprachen L_2, L_3 und L_8 spricht und so weiter.
- Es gibt also auch genau einen Athleten, der alle 10 Sprachen spricht und es gibt genau einen Athleten, der keine Sprache spricht.

Natürlich muss auch Otto so sparsam wie möglich arbeiten. Er möchte daher so wenig Häuser wie möglich bauen, muss dabei aber trotzdem die Regeln des Komitees einhalten. Wie viele Häuser muss Otto mindestens bauen, um alle 1024 Athleten unterzubringen? Sei k die gesuchte minimale Anzahl an Häusern. Wie lautet die letzte Ziffer von k im Dezimalsystem?

Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 0

Projektbezug:

Dieses Rätsel ist ein Beispiel für ein Färbungsproblem, und obwohl diese besonders unterhaltsam sind, sind sie in der Regel schwierig. Üblicherweise haben wir eine bestimmte Menge V, deren Elemente wir färben möchten; jedoch darf der Teufel uns eine beliebige Liste von Bedingungen E geben, die Paare von Elementen spezifiziert, die nicht dieselbe Farbe erhalten dürfen. Unser Ziel ist es meistens, die minimale Anzahl von Farben zu bestimmen, die ausreicht, um die Elemente unserer Menge so zu färben, dass keine der Bedingungen des Teufels verletzt wird. Dieses Unterfangen gilt als berüchtigt schwierig; tatsächlich gibt es keinen bekannten schnellen Weg, um zu bestimmen, ob eine beliebige Menge V mit einer entsprechenden Liste E von Bedingungen mit nur 3 Farben korrekt gefärbt werden kann. Falls Sie einen schnellen Algorithmus dafür finden, sollten Sie sich einen Sekretär oder eine Sekretärin einstellen, da viele Menschen mit Ihnen sprechen möchten.

Dieses spezielle Problem hat einen ziemlich berühmten Verwandten: Angenommen, es gibt n Sprachen am Nordpol, wobei jeder Athlet genau k Sprachen spricht und jede Teilmenge von k Sprachen von genau einem Athleten gesprochen wird. Nun kann man erneut nach der minimalen Anzahl von Häusern fragen, die benötigt werden, um die Athleten unterzubringen, sodass keine zwei Athleten, die keine gemeinsame Sprache sprechen, dasselbe Haus teilen. Dieses Problem blieb 22 Jahre lang ungelöst, bevor es unter Verwendung scheinbar unabhängiger Theoreme aus der Topologie gelöst wurde!

Lösung

Die richtige Antwort ist: 1.

Wir beweisen, dass $k = 11$.

Zuerst zeigen wir, dass k mindestens 11 betragen muss. Dazu müssen wir nur beachten, dass die eine Person, die keine Sprache spricht, und die 10 Athleten, die jeweils nur eine Sprache sprechen, alle in verschiedenen Häusern untergebracht werden müssen. Das liegt daran, dass keine dieser 11 Athleten ein gemeinsames Haus mit einer der anderen teilen kann. Daher muss Otto bereits für diese 11 Personen 11 Häuser bauen.

Schließlich zeigen wir, dass 11 Häuser ausreichen. Bezeichnen wir die 10 Sprachen mit L_1, L_2, ..., L_{10}. Für jeden Athleten verfahren wir wie folgt: Wenn er L_1 spricht, bringen wir ihn in Haus 1 unter. Falls nicht, geht er weiter zu Haus 2. Wenn er L_2 spricht, bringen wir ihn in Haus 2 unter, andernfalls setzen wir diesen Prozess fort. Wenn ein Athlet Haus 11 erreicht, bringen wir ihn sofort dort unter.

Für die Häuser nummeriert von 1 bis 10 spricht jeder Athlet, der in diesem Haus untergebracht ist, die entsprechende Sprache – sodass diese Sprache für alle in diesem Haus gemeinsam ist, und die Regel in den Häusern 1 bis 10 eingehalten wird. Der einzige Weg, wie ein Athlet nicht in einem der Häuser 1 bis 10 untergebracht wird, ist, wenn er keine der zehn Sprachen spricht. Es gibt nur einen Athleten dieser Art, und er wird alleine in Haus 11 untergebracht, was ebenfalls die Regel erfüllt.

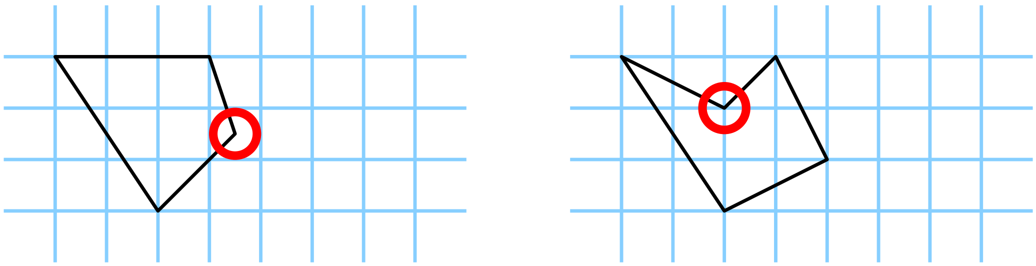
Illustration: Ivana Martić

18 Geschenkkarten

Autor: Christian Haase
Projekt: AA3-12

Aufgabe

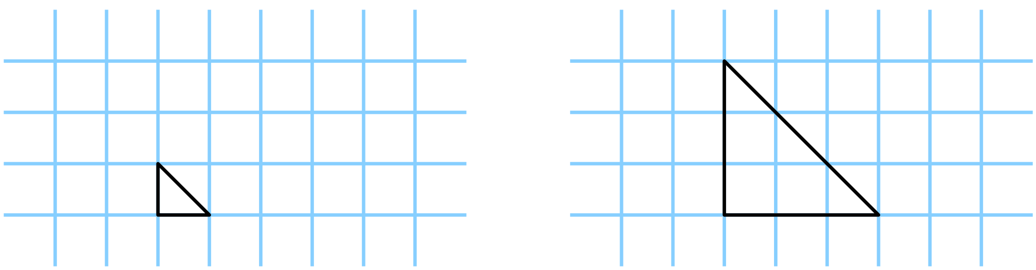
Die Wichtel stellen Geschenkkarten aus Karopapier her, das sie normalerweise für Berechnungen verwenden, und fertigen diese für Kinder in verschiedenen Formen an. Um die Produktion zu erleichtern, hat der Weihnachtsmann vorgeschrieben, dass alle Karten die Form eines geschlossenen konvexen Polygons annehmen müssen, wobei alle Eckpunkte des Polygons Kreuzungspunkte auf dem Karopapier sein müssen.
„Konvex“ bedeutet hier, dass man entlang des Weges nur Linkskurven machen kann, und „Eckpunkte“ bedeutet, dass der Wichtel an diesen Stellen beim Ausschneiden der Karte die Richtung ändern muss. Diese Vorgaben schließen bestimmte Formen aus:
Das erste Bild in 27 zeigt eine konvexe Karte, bei der ein Eckpunkt kein Kreuzungspunkt des Karopapiers ist, und das zweite Bild zeigt ein Beispiel für eine nicht-konvexe Karte.
Der Weihnachtsmann bezeichnet mit b die Anzahl der Kreuzungspunkte entlang des Randes der Karte und mit i die Anzahl der Kreuzungspunkte im Inneren der Karte. Für jedes solcher Polygone wird die eingeschlossene Fläche mit a bezeichnet, wobei die Seitenlänge eines Quadrats auf dem Karopapier 1 Dezimeter beträgt.
Nun führt der Weihnachtsmann für die Karten die Kurzschreibweise (b, i, a) ein. Zum Beispiel hätte eine Geschenkkarte wie in Abbildung 28 (a) genau $b = 3$ Kreuzungspunkte auf dem Rand, $i = 0$ innere Kreuzungspunkte und eine Fläche von $a = \frac{1}{2}$. Die zugehörige Kurzschreibweise lautet dann $\left(3, 0, \frac{1}{2}\right)$. Ebenso kann eine Karte mit den Werten $(9, 1, \frac{9}{2})$ in Abbildung 28



(a) (b)

Abbildung 27: Zwei Beispiele für verbotene Karten: Die erste hat keine richtigen Eckpunkte und die zweite ist nicht konvex. *Beide Karten sind laut Definition verboten!*

(b) beobachtet werden.



(a) (b)

Abbildung 28: Beispiele für gültige Karten.

Die Wichtel sind nun besorgt, dass einige Geschenkkarten möglicherweise nicht mehr hergestellt werden können. Welche der folgenden Karten mit den Tripeln (b, i, a) können sie weiterhin erstellen?

- $(24, 16, 27)$
- $(15, 7, 13.5)$
- $(3, 9, 9.5)$
- $(18, 0, 9)$

Antwortmöglichkeiten:

1. (ja, ja, ja, ja)
2. (ja, ja, nein, ja)
3. (ja, ja, ja, nein)
4. (ja, nein, ja, ja)
5. (nein, ja, ja, ja)
6. (nein, ja, nein, ja)
7. (ja, nein, ja, nein)
8. (nein, nein, ja, ja)
9. (nein, nein, nein, ja)
10. (nein, nein, nein, nein)

Projektbezug

Das Projekt zielt darauf ab, unser Verständnis der Ausdruckskraft neuronaler Netze (NNs) zu vertiefen. Insbesondere werden sowohl untere als auch obere Schranken für die topologische Vereinfachung untersucht, die ein ReLU-Neuronales Netz bei gegebener Architektur erreichen kann.
Im Kontext allgemeiner Darstellungen von Funktionen beobachten wir, dass die von einem ReLU-Netzwerk berechnete Funktion stückweise linear und kontinuierlich (CPWL) ist, da sie eine Komposition aus affinen Transformationen und der ReLU-Funktion ist. Andererseits ist bekannt, dass jede CPWL-Funktion durch ein ReLU-Netzwerk logarithmischer Tiefe dargestellt werden kann. In [1] wurde vermutet, dass diese logarithmische Schranke scharf ist. Mit anderen Worten: Es könnte CPWL-Funktionen geben, die nur durch ReLU-Netzwerke logarithmischer Tiefe dargestellt werden können.
Diese Vermutung wurde unter einer natürlichen Annahme für die Dimension $n = 4$ unter Verwendung von Techniken der gemischt-ganzzahligen Optimierung bewiesen. Zusätzlich wurde in [2] gezeigt, dass logarithmische Tiefe erforderlich ist, um das Maximum von n Zahlen zu berechnen, wenn nur ganzzahlige Gewichte erlaubt sind. Dieses Ergebnis basiert auf der Dualität zwischen neuronalen Netzwerken und Newton-Polytopen durch tropische Geometrie. Ein primäres Ziel dieses Projekts ist es, die Vermutung entweder zu beweisen oder zu widerlegen.

Literatur

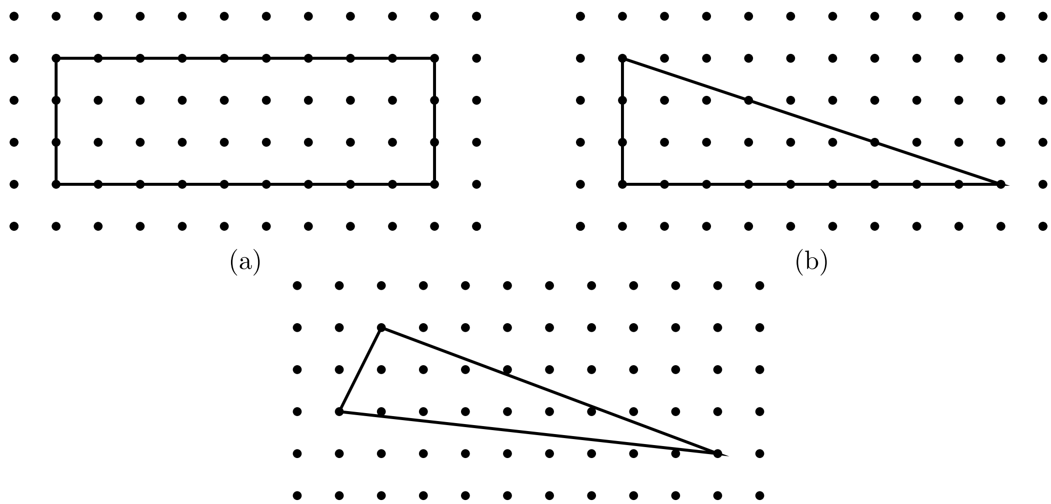
[1] Christoph Hertrich, Amitabh Basu, Marco Di Summa, und Martin Skutella. Towards lower bounds on the depth of ReLU neural networks. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 37(2):997–1029, 2023.

[2] Christian Haase, Christoph Hertrich und Georg Loho. Lower bounds on the depth of integral ReLU neural networks via lattice polytopes, 2023.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 3.

Beachtet, dass die Linien des Karopapiers eigentlich nicht wichtig sind – die Wichtel sollten nur die tatsächlichen Kreuzungspunkte des Karopapiers betrachten. Daher werden von nun an nur die Kreuzungspunkte als große Punkte dargestellt.
Durch das Zeichnen konkreter Beispiele kann man feststellen, dass es Geschenkkarten mit der gewünschten Anzahl von Randpunkten, inneren Punkten und Flächen für die ersten drei Beispiele gibt, wie in Abbildung 29 gezeigt.



(a) (b) (c)

Abbildung 29: Beispiele für die ersten drei Geschenkkarten.

Egal wie sehr sich die Wichtel bemühen, sie können jedoch keine Geschenkkarte für das vierte Beispiel herstellen!
Dies folgt aus dem Satz von Pick, der besagt, dass für jede Geschenkkarte Folgendes gelten muss:

$$a = i + \frac{1}{2}b - 1.$$

Diese Gleichung gilt nicht für das vierte Beispiel, daher können die Wichtel keine Geschenkkarte mit dieser Fläche und den entsprechenden Zahlen von Rand- und Innenpunkten herstellen.

Beweis des Satzes von Pick Schritt für Schritt:

(A) Rechtecke mit Kanten parallel zu den Koordinatenachsen

Betrachten wir ein Rechteck mit Seiten parallel zu den Koordinatenachsen und Seitenlängen m und n. Seine Fläche ist $a = mn$. Da zwei seiner Kanten $m+1$ und zwei $n+1$ Punkte haben, und nur die 4 Ecken des Rechtecks doppelt gezählt werden, ist die Anzahl der Randpunkte:

$$b = 2(m+1) + 2(n+1) - 4 = 2m + 2n.$$

Im Inneren dieses Rechtecks befinden sich $n-1$ Reihen mit jeweils $m-1$ Punkten, daher ist die Anzahl der inneren Punkte:

$$i = (m-1)(n-1) = mn - m - n + 1.$$

Nun prüfen wir, ob die Formel $a = i + \frac{1}{2}b - 1$ gilt:

$$a = mn = (m-1)(n-1) + m + n - 1 = (m-1)(n-1) + \frac{1}{2}(2m+2n) - 1.$$

Daher gilt die Formel für alle Geschenkkarten in der Form eines Rechtecks mit Seiten parallel zu den Koordinatenachsen.

(B) Dreiecke mit zwei Seiten parallel zu den Koordinatenachsen

Beachtet, dass jedes solche Dreieck tatsächlich die Hälfte eines Rechtecks mit Seiten parallel zu den Koordinatenachsen ist, wie in Abbildung 30 gezeigt.

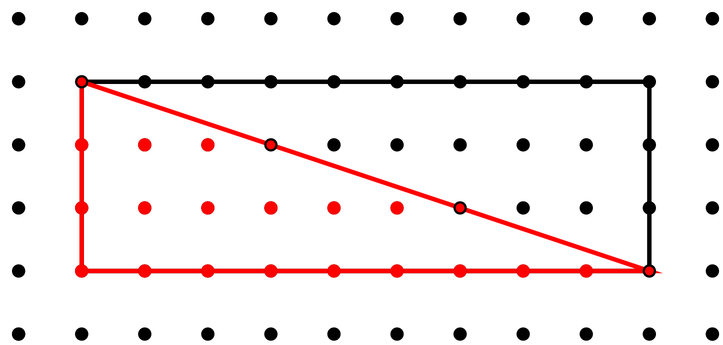


Abbildung 30: Geschenkkarte in der Form eines Dreiecks mit zwei Seiten parallel zu den Koordinatenachsen.

Für jedes Dreieck T, das die Hälfte eines Rechtecks R ist, gilt:

$$a(T) = \frac{1}{2}a(R), \quad b(T) = \frac{1}{2}b(R) + e - 1, \quad i(T) = \frac{1}{2}i(R) - \frac{1}{2}e + 1,$$

wobei e die Punkte auf der gemeinsamen Kante sind. Durch Einsetzen dieser Beziehungen kann man zeigen, dass die Formel auch für Dreiecke mit zwei Seiten parallel zu den Koordinatenachsen gilt.

(C) Zusammenfügen zweier Geschenkkarten entlang einer gemeinsamen Kante

Im vorherigen Abschnitt haben wir den Umstand, dass wir mit Dreiecken und Rechtecken arbeiten, nicht wirklich stark ausgenutzt – wir haben hauptsächlich die Tatsache verwendet, dass man das Rechteck erhält, indem man zwei Dreiecke entlang einer gemeinsamen Kante zusammenklebt.

Wenn zwei Geschenkkarten entlang einer gemeinsamen Kante zusammengefügt werden, ist die resultierende Fläche gleich der Summe der Flächen der beiden einzelnen Karten. Ähnlich gilt: Da die Gleichung $a = i + \frac{1}{2}b - 1$ für jede Karte einzeln erfüllt ist, stellen wir fest, dass sich die linke Seite ihrer jeweiligen Gleichungen linear kombiniert. Unser Ziel ist es nun zu zeigen, dass sich auch die rechte Seite der Formel unter dieser Operation linear kombinieren lässt.

Seien P und Q zwei Geschenkkarten, die wir entlang einer gemeinsamen Kante zusammenfügen, und bezeichnen wir die resultierende Geschenkkarte mit S. Sei e die Anzahl der Punkte auf der gemeinsamen Kante. Wie bereits erwähnt, gilt $a(S) = a(P) + a(Q)$.

Alle Punkte auf der gemeinsamen Kante sind Randpunkte sowohl von P als auch von Q, aber in der Karte S befinden sich nur die beiden Endpunkte der Kante am Rand, während die restlichen Punkte im Inneren liegen. Summiert man die Randpunkte von P und Q, so erhält man die Randpunkte von S, wobei die beiden Endpunkte der gemeinsamen Kante doppelt gezählt werden, sowie $2(e-2)$ zusätzliche Punkte, die im Inneren von S liegen. Somit gilt:

$$b(P) + b(Q) = b(S) + 2 + 2(e-2).$$

Durch Umstellen erhalten wir:

$$b(S) = b(P) + b(Q) - 2e + 2.$$

Die inneren Punkte von S sind genau die inneren Punkte von P plus die inneren Punkte von Q, sowie die $e-2$ Punkte auf der gemeinsamen Kante, die keine Endpunkte sind. Es folgt:

$$i(S) = i(P) + i(Q) + e - 2.$$

Fasst man alles zusammen, ergibt sich:

$$i(S) + \frac{1}{2}b(S) - 1 = i(P) + i(Q) + e - 2 + \frac{1}{2}(b(P) + b(Q) - 2e + 2) - 1.$$

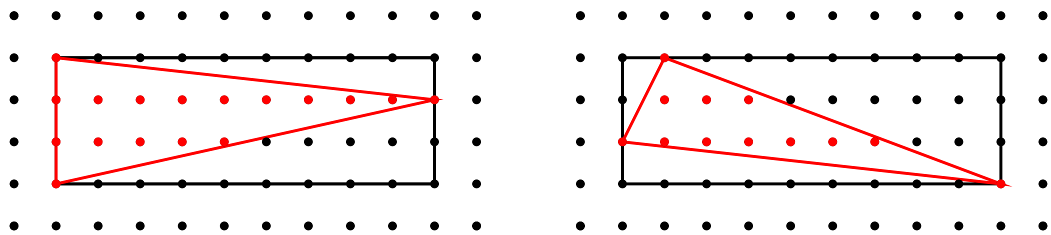
Durch Umstellen erhalten wir schließlich:

$$i(S) + \frac{1}{2}b(S) - 1 = (i(P) + \frac{1}{2}b(P) - 1) + (i(Q) + \frac{1}{2}b(Q) - 1).$$

Womit die Linearität der zweiten Seite gezeigt ist.

Beliebige Dreiecke

Wir möchten zeigen, dass die Formel auch für Geschenkkarten in der Form von Dreiecken gilt, bei denen eine oder keine der Kanten parallel zu den Koordinatenachsen verläuft. Die Idee ist, um jede dreieckige Geschenkkarte ein Rechteck mit Kanten parallel zu den Koordinatenachsen zu legen, indem man zusätzliche Dreiecke mit zwei Kanten parallel zu den Koordinatenachsen an das Ausgangsdreieck anfügt. Genau genommen wird dieses Rechteck durch die Linien begrenzt $\{x =$ „maximaler x-Wert der Eckpunkte des Dreiecks“$\}$,
$\{x =$ „minimaler x-Wert der Eckpunkte des Dreiecks“$\}$,
$\{y =$ „maximaler y-Wert der Eckpunkte des Dreiecks“$\}$ und
$\{y =$ „minimaler y-Wert der Eckpunkte des Dreiecks“$\}$.
Da sowohl a als auch $i + \frac{1}{2}b - 1$ linear kombinierbar sind, wenn Geschenkkarten entlang gemeinsamer Kanten zusammengefügt werden, und die Formel für Rechtecke mit Kanten parallel zu den Koordinatenachsen sowie für Dreiecke mit zwei Kanten parallel zu den Koordinatenachsen gilt, folgt, dass die Formel auch für beliebige Dreiecke gilt.



(a) (b)

Abbildung 31: Rechteckige Geschenkkarten, die um beliebige dreieckige Geschenkkarten gelegt werden.

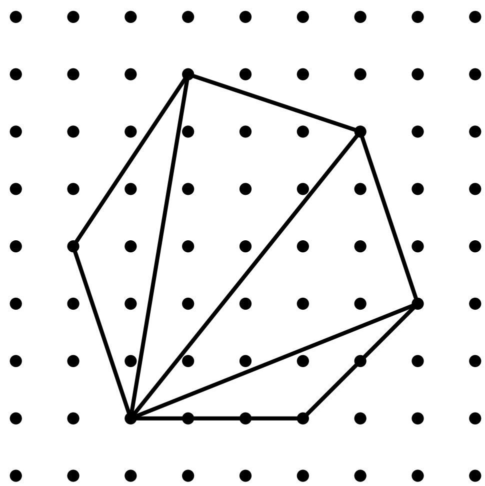


Abbildung 32: Geschenkkarte in Dreiecke zerlegt.

Beliebige konvexe Polygone

Jede Geschenkkarte in Form eines konvexen Polygons lässt sich durch das Einzeichnen aller von einem gemeinsamen Eckpunkt ausgehenden Diagonalen in Dreiecke zerlegen.
Da wir bewiesen haben, dass die Formel für alle dreieckigen Geschenkkarten gilt, und dass, wenn man Geschenkkarten zusammenfügt, für die die Formel gilt, die Formel auch für die neue Geschenkkarte gilt, können wir schlussfolgern, dass die Formel für alle Geschenkkarten gilt:

$$a = i + \frac{1}{2}b - 1.$$

Illustration: Zyanya Santuario

19 Eine verzahnte Angelegenheit

Autor: Lukas Protz (TU Berlin, MATH+)

Aufgabe

Es ist dunkel und staubig. Was erwartet man auch anderes vom Dachboden des Weihnachtsmanns am Nordpol? Nur mit einer kleinen Taschenlampe ausgestattet, wollte der eifrige Elf Eifi den Dachboden der Werkstatt des Weihnachtsmanns aufräumen, damit mehr Platz für alle Geschenke geschaffen werden kann. Zu seiner Überraschung ist der Dachboden voller kleiner Schatzkisten, die durch einen merkwürdigen Mechanismus verschlossen sind. Eifi fragt sich, ob der Weihnachtsmann etwas vor den Elfen versteckt, und eifrig wie er ist, versucht er, die Kisten zu öffnen. Dabei entdeckt er, dass der Mechanismus wie folgt funktioniert:

- Auf dem Deckel jeder Kiste befinden sich drei Zahnräder. Die Anzahl der Zähne der Zahnräder kann kann gleich oder ungleich zur Anzahl der Zähne der anderen beiden Zahnräder sein.
- Ein Zahn jedes Zahnrads ist mit einem Kreis markiert.
- Wenn man direkt von oben auf die Zahnräder schaut, zeigt immer ein Zahn jedes Zahnrads genau nach oben.
- Außerdem befinden sich drei Taster auf der Kiste. Wird ein Taster gedrückt, drehen sich jeweils zwei der Zahnräder gleichzeitig. Die Drehung erfolgt immer im Uhrzeigersinn und bewegt beide Zahnräder jeweils um einen Zahn weiter. Taster können nicht gleichzeitig, sondern nur nacheinander gedrückt werden.

- Die Zahnräder sind den Tastern wie folgt zugeordnet:
  - Taster 1 dreht die Zahnräder 2 und 3
  - Taster 2 dreht die Zahnräder 1 und 3
  - Taster 3 dreht die Zahnräder 1 und 2
- Die Kiste öffnet sich, wenn alle drei markierten Zähne jeweils nach oben zeigen.

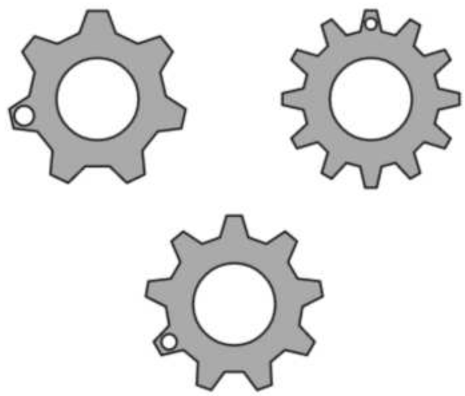


Abbildung 33: Beispiel einer Ausgangskonfiguration von drei Zahnrädern. Nur der markierte Zahn des oberen rechten Zahnrads zeigt nach oben.

Leider hat Eifi keine Strategie beim Versuch, die Kisten zu entriegeln, und schafft es nur, einige wenige Kisten zu öffnen. Doch das hält Eifi nicht davon ab, seine Mission fortzusetzen, um alle Geheimnisse zu entdecken, die der Weihnachtsmann möglicherweise in den Kisten verbirgt. Wenn es doch nur ein universelles Handbuch gäbe, wie man alle Kisten öffnen kann...

Kannst du Eifi helfen? Für welche Kombinationen von drei Zahnrädern mit einer Anzahl von Zähnen a, b und c ist es unabhängig von der Ausgangsposition der einzelnen Zahnräder möglich, die Kiste zu öffnen?

Hinweis: Die Frage sucht nach der größten Menge an Tripeln a, b und c oder äquivalent nach der kleinsten hinreichenden Einschränkung für a, b und c.

Antwortmöglichkeiten:

1. Es ist niemals möglich.
2. a, b und c sind paarweise teilerfremd
3. Zwei der Zahlen a, b und c sind teilerfremd.
4. a, b und c sind nicht durch 2 teilbar.
5. Nicht alle Zahlen a, b und c sind durch 2 teilbar.
6. a, b und c sind alle durch 2 teilbar.
7. a, b und c sind nicht durch 3 teilbar.
8. Nicht alle Zahlen a, b und c sind durch 3 teilbar.
9. a, b und c sind alle durch 3 teilbar.
10. Keine der anderen Antwortmöglichkeiten trifft zu.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 5.

Zuerst zeigen wir, dass alle Tripel (a, b, c), die Aussage 5 nicht erfüllen, nicht immer geöffnet werden können. Mit anderen Worten: Wir zeigen, dass, wenn alle Zahlen a, b, c gerade sind, die Kiste nicht immer geöffnet werden kann.
Um dies zu zeigen, verwenden wir die folgende Notation:

- $(0, 0, 0)$ bezeichnet den Zustand, in dem alle markierten Zähne nach oben zeigen.
- (x, y, z) bezeichnet den Zustand, der durch Rotation des ersten Zahnrads um x, des zweiten Zahnrads um y und des dritten Zahnrads um z Positionen aus $(0, 0, 0)$ hervorgeht. Die Reihenfolge der Zahnräder kann beliebig gewählt werden, wird aber nach der Festlegung nicht mehr verändert.
- $(x, y, z) \rightsquigarrow (x', y', z')$ bezeichnet die Möglichkeit, durch Drücken der Taster den Zustand (x, y, z) in den Zustand (x', y', z') zu überführen. Andernfalls schreiben wir $(x, y, z) \not\rightsquigarrow (x', y', z')$.

Behauptung 1: $(1, 0, 0) \not\rightsquigarrow (0, 0, 0)$, wenn a, b, c alle durch 2 teilbar sind.

Beweis: Die Summe der Startpositionen s und aller Rotationen r (1 Tasterbetätigung = 2 Rotationen) muss eine Summe c an vollständigen Umdrehungen der Zahnräder ergeben (Andernfalls zeigen die markierten Zähne nicht nach oben). In unserem Fall ist $s = 1$, was ungerade ist. Außerdem ist r stets gerade. Daher ist $r + s$ ungerade.
Andererseits entspricht jede vollständige Umdrehung eines Zahnrads einer geraden Zahl, da die Anzahl der Zähne jedes Zahnrads durch 2 teilbar ist. Somit ist eine beliebige Summe vollständiger Umdrehungen der Zahnräder gerade. Aber dann ist die ungerade Zahl $r + s$ gleich einer geraden Zahl c, was ein Widerspruch ist. Daher gilt $(1, 0, 0) \not\rightsquigarrow (0, 0, 0)$. $\square$

Als Nächstes zeigen wir, dass, wenn Aussage 5 gilt, d.h. eine der Zahlen a, b, c nicht durch 2 teilbar ist, die Kiste immer geöffnet werden kann. Dazu nehmen wir an, dass die Anzahl der Zähne des ersten Zahnrads nicht durch zwei teilbar ist (andernfalls wählen wir eine andere Reihenfolge der Zahnräder). Eine einfache Beobachtung ist, dass es immer möglich ist, einen Zustand (x, y, z) in einen Zustand $(x', 0, 0)$ zu überführen, wobei x' von x, y und z abhängt. Diese Transformation kann durchgeführt werden, indem der Taster für das erste und zweite Zahnrad so oft gedrückt wird, bis das zweite Zahnrad eine vollständige Umdrehung macht. Ähnlich drückt man den Taster für das erste und dritte Zahnrad, bis das dritte Zahnrad eine vollständige Umdrehung vollführt.

Das Letzte, was gezeigt werden muss, ist die folgende Behauptung:
Behauptung 2: $(x, 0, 0) \rightsquigarrow (0, 0, 0)$, wenn a nicht durch 2 teilbar ist.

Beweis:
<u>Schritt 1:</u> Drücke die Taster für das erste und zweite Zahnrad sowie für das erste und dritte Zahnrad abwechselnd, bis einer der beiden folgenden Fälle eintritt:

- Fall 1: Das erste Zahnrad beendet seine nächste vollständige Umdrehung, und beide Taster wurden gleich oft gedrückt. In diesem Fall fahren wir mit Schritt 2 fort.

- Fall 2: Das erste Zahnrad beendet seine nächste vollständige Umdrehung, und ein Taster wurde einmal mehr gedrückt als der andere. In diesem Fall drücken wir die Taster weiterhin abwechselnd, bis das erste Zahnrad erneut eine vollständige Umdrehung abschließt, und fahren dann mit Schritt 2 fort. Da die Anzahl der Zähne des ersten Zahnrads ungerade ist, wurden beim nächsten Abschluss einer vollständigen Umdrehung beide Taster gleich oft gedrückt.

In beiden Fällen kann erreicht werden, dass die beiden beteiligten Taster gleich oft gedrückt wurden und der markierte Zahn des ersten Zahnrads nach oben zeigt.

Schritt 2: Drücke den verbleibenden Taster, bis sowohl das zweite als auch das dritte Zahnrad eine vollständige Anzahl von Umdrehungen vollführen. Dies ist wirklich möglich, wie im Folgenden ersichtlich wird: Nach Schritt 1 wurden sowohl das zweite als auch das dritte Zahnrad gleich oft gedreht. Nennen wir diese Anzahl n. Das zweite Zahnrad schließt eine vollständige Anzahl von Umdrehungen nach $b-n,\ 2b-n,\ 3b-n,\dots$ mal Taster drücken ab (sofern diese Zahlen nicht negativ sind). Ähnlich schließt das dritte Zahnrad eine vollständige Anzahl von Umdrehungen nach $c-n,\ 2c-n,\ 3c-n,\dots$ mal Taster drücken ab. In beiden Folgen tauchen die Zahlen $b\cdot c-n,\ 2\cdot b\cdot c-n,\ 3\cdot b\cdot c-n,\dots$ auf. Daher führt die Wahl der ersten positiven Zahl in der letzten Folge dazu, dass sowohl das zweite als auch das dritte Zahnrad eine vollständige Anzahl von Umdrehungen abschließen. Somit zeigen alle markierten Zähne nach oben, und die Kiste öffnet sich. Damit ist der Beweis der Behauptung abgeschlossen. □

Hoffen wir, dass Eifi nur auf Kisten trifft, bei denen mindestens ein Zahnrad eine ungerade Anzahl von Zähnen hat, und hoffen wir, dass ihm jemand zeigt, wie man die Kisten systematisch öffnet...

Bonus: Die Frage kann auf eine beliebige Anzahl n von Zahnrädern pro Kiste und jeden Taster, der k Zahnräder gleichzeitig dreht, verallgemeinert werden. Welche Einschränkungen gibt es für die Anzahl der Zähne der Zahnräder?

Illustration: Julia Nurit Schönnagel

20 Weihnachtsmarkt Besuch

Autor: Sören Nagel (ZIB)
Projekt: EF 45-1

Aufgabe

Es ist die Nacht vor Weihnachten, und die Weihnachtswichtel sind eifrig mit der Geschenkeproduktion beschäftigt. Während sie arbeiten, diskutieren sie, welchen Weihnachtsmarkt sie nach ihrer Schicht gemeinsam besuchen wollen. Die Entscheidung ist nicht leicht:

- **Weihnachtsmarkt M** ist berühmt für seine gebrannten Mandeln.
- **Weihnachtsmarkt A** ist bekannt für seine kandierten Äpfel.

Neun Wichtel sitzen in einer Reihe, und jeder hat eine Präferenz für einen der Märkte. Einige von ihnen haben jedoch eine starke, feste Meinung, während andere noch unentschlossen sind und sich von ihren Nachbarn beeinflussen lassen. So sieht die Situation aus:

- **Wichtel Max** sitzt ganz links (auf dem ersten Stuhl) und ist ein eingefleischter Fan von gebrannten Mandeln. Er wird seine Meinung niemals ändern.
- **Wichtel Anna** sitzt ganz rechts (auf dem letzten Stuhl) und ist genauso fest von ihrer Liebe zu kandierten Äpfeln überzeugt.

Die Wichtel zwischen ihnen (Wichtel 2 bis 8) haben keine festen Meinungen und passen ihre Präferenz basierend auf ihren Nachbarn an. Anfangs werden ihre Präferenzen zufällig auf gebrannte Mandeln oder kandierte Äpfel gesetzt.
Jede Runde wird zufällig einer der unentschlossenen Wichtel von den Positionen 2 bis 8 ausgewählt. Dieser Wichtel wählt wiederum zufällig einen seiner beiden direkten Nachbarn aus und übernimmt dessen Meinung. Anschließend beginnt die nächste Runde, in der erneut ein zufällig ausgewählter unentschlossener Wichtel von Position 2 bis 8 die Präferenz eines seiner Nachbarn übernimmt.
Die erste Frage lautet:

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Mehrheit der Wichtel nach einer sehr langen Diskussion für die gebrannten Mandeln entscheidet?

Im folgenden Jahr möchte Max den Entscheidungsprozess der Gruppe effektiver beeinflussen, hat aber immer noch keine Verbündeten, die sich für gebrannte Mandeln einsetzen würden. Um seinen Einfluss zu erhöhen, beschließt er, zwei Plätze weiter an die dritte Position zu rücken, indem er den Platz mit dem unentschlossenen Wichtel tauscht, der vorher dort saß. Obwohl Max nun eine zentralere Position hat, ist er immer noch der einzige standhafte Befürworter von gebrannten Mandeln und Anna, die immer noch ganz rechts sitzt, ist immer noch überzeugt, zum Weihnachtsmarkt A zu gehen.

Die zweite Frage lautet:

2. Nach Max' Positionswechsel, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Mehrheit der Wichtel nach einer sehr langen Diskussion für die gebrannten Mandeln entscheidet?

Die Antwort ist abgerundet bis auf 3 Nachkommastellen.
Mathematisch ausgedrückt stabilisiert sich die Wahrscheinlichkeit, im Sinne, dass sie sich nicht mehr ändert. Die Diskussionen dürfen erst aufhören, wenn sich die Wahrscheinlichkeit stabilisiert hat.

Hinweis: Es darf angenommen werden, dass die stabilisierte Wahrscheinlichkeit, dass sich ein unentschlossener Wichtel für gebrannte Mandeln oder kandierte Äpfel entscheidet, linear von seiner Position zwischen den sturen Wichteln Max und Anna abhängt.
Zum Beispiel: Wenn es nur 4 Wichtel gäbe und wir Max mit 0 nummerieren und Anna mit 3, dann wären die stabilisierten Wahrscheinlichkeit für Äpfel, die Anna will, wie folgt:

- Wichtel 0 (Max): $\frac{0}{3} = 0$,
- Wichtel 1 (unentschlossen): $\frac{1}{3}$,
- Wichtel 2 (unentschlossen): $\frac{2}{3}$,
- Wichtel 3 (Anna): $\frac{3}{3} = 1$.

Antwortmöglichkeiten:

1. 0 und 0
2. 0 und 0,153
3. 0,3 und 0,667
4. 0,5 und 0,153
5. 0,5 und 0,667
6. 0,5 und 0,75
7. 0,5 und 0,85
8. 1 und 0,153
9. 1 und 0,667
10. 1 und 0,866

Projektbezug:

Dieses Rätsel untersucht, wie Position und Einfluss die Konsensbildung in Gruppen mit einer Mischung aus entschlossenen und unentschlossenen Mitgliedern beeinflussen. Es ist ein anschauliches Beispiel für den engen Zusammenhang zwischen Netzwerkstruktur und Dynamik. Die Position von Akteuren in einem Interaktionsnetzwerk sowie deren Interaktionen können ihre Einflussnahme bestimmen, und beide sind wesentliche Komponenten der Informationsverbreitung in sozialen Netzwerken oder der Verbreitung von Innovationen entlang antiker und moderner Straßen- oder Handelsnetzwerke.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 5.

Frage 1:

Beachte, dass das gesamte Problem symmetrisch ist – die einzigen standhaften Wichtel sitzen an gegenüberliegenden Enden der Reihe, und alle anderen Wichtel haben zunächst zufällig mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine Meinung, und der gesamte Diskussionsprozess bevorzugt weder gebrannte Mandeln noch kandierte Äpfel. Da Max' und Annas Ziele identisch sind – mindestens 4 der 7 Wichtel mit den Nummern 2 bis 8 zu überzeugen, sind auch ihre Erfolgschancen identisch. Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit 0,5, dass die Gruppe gebrannte Mandeln wählt.

Frage 2:

Dieses Szenario ändert die Dynamik drastisch, da Max nun zentraler sitzt und potenziell mehr Einfluss auf die Mehrheit der flexiblen Wichtel hat. Lass uns bewerten, wie sich dies auf die Wahrscheinlichkeit einer Mehrheit für gebrannte Mandeln auswirkt.
Wenn Max auf Position 3 sitzt, passiert Folgendes: Zu einem bestimmten Zeitpunkt während der langen Diskussion wird der zweite Wichtel ausgewählt und der spricht dann zufälligerweise mit Max, woraufhin der erste Wichtel gefragt wird. Der einzige Nachbar, den der erste Wichtel befragen kann, ist der zweite, und daher beginnt auch der erste, gebrannte Mandeln zu bevorzugen. Nachdem dies passiert ist, bevorzugen die Wichtel auf den Stühlen 1 bis 3 alle gebrannte Mandeln und ändern ihre Meinung nicht mehr.
Ab diesem Zeitpunkt haben Max und Anna 5 Wichtel zwischen sich, die keine feste Wahl haben. Beachte, dass das Problem jetzt nicht mehr symmetrisch ist – damit Anna gewinnt, muss sie 4 dieser Wichtel überzeugen, während Max nur noch 2 überzeugen muss.
Beschriften wir diese 5 unentschlossenen Wichtel mit 1 bis 5, Max mit 0 und Anna mit 6. Beachte, dass dieses Problem aufgrund der Gleichverteilung und der langen Zeitdauer linear ist – die Wahrscheinlichkeit, dass der Wichtel mit der Nummer i nach langer Zeit kandierte Äpfel wählt, ist

$$p_i = \frac{i}{6}.$$

Die Linearität spiegelt die relative Nähe eines Wichtels zu Max oder Anna wider: Je näher ein Wichtel bei Anna sitzt, desto höher ist seine Wahrscheinlichkeit, sich für kandierte Äpfel zu entscheiden, und umgekehrt.
Zum Beispiel hat Anna an Position 6 die Wahrscheinlichkeit $\frac{6}{6} = 1$, da sie vollständig überzeugt von kandierten Äpfeln ist. Max an Position 0 hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{0}{6} = 0$, da er sich ausschließlich für gebrannte Mandeln entscheidet. Ein Wichtel genau in der Mitte, an Position 3, hat eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{6} = 0,5$, sich für kandierte Äpfel zu entscheiden. Dies zeigt, dass die Wahrscheinlichkeiten entlang der Reihe proportional zur Position eines Wichtels zwischen Max und Anna verteilt sind, wobei die Werte von 0 bis 1 linear ansteigen.
Wir definieren den Vektor $O := (x_1, x_2, \ldots, x_9)$ als den binären Vektor der Meinungen, wobei $x_i = 1$ bedeutet, dass der Elf i für gebrannte Mandeln ist, und $x_i = 0$, wenn der Elf i für kandierte Äpfel ist. Betrachten wir die folgenden stabilen Konstellationen:

1. $O := (1,1,1,0,0,0,0,0,0)$
2. $O := (1,1,1,1,0,0,0,0,0)$
3. $O := (1,1,1,1,1,0,0,0,0)$
4. $O := (1,1,1,1,1,1,0,0,0)$
5. $O := (1,1,1,1,1,1,1,0,0)$
6. $O := (1,1,1,1,1,1,1,1,0)$

In 4 von 6 Fällen entscheidet sich die Mehrheit für den Mandel-Weihnachtsmarkt, und in 2 von 6 Fällen für den Apfel-Weihnachtsmarkt. Wir stellen außerdem fest, dass sich die Meinung von einem Elfen nur ändern kann, wenn dieser Elf zwischen zwei Nachbarn mit unterschiedlicher Meinung sitzt. Dadurch wechseln die Zustände nur zwischen diesen 6 Konstellationen. Daher schließen wir, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ die Mehrheit für den Mandel-Weihnachtsmarkt entscheidet.
Im nächsten Schritt zeigen wir, dass alle anderen Zustände gegen die beschriebenen Zuständen strebt.
Betrachten wir Zustände, in denen ein Elf mit Meinung A zwischen zwei Nachbarn sitzt, die beide die gleiche Meinungen haben, nämlich B. In einem solchen Fall wird dieser Elf sofort die Meinung seiner Nachbarn übernehmen, weil dieser Elf irgendwann aufgerufen wird. Es ist nämlich unmöglich, dass dieser Elf niemals aufgerufen wir.
Damit bleiben nur folgende Zustände:

1. $O := (1,1,1,0,0,1,0,0,0)$
2. $O := (1,1,1,0,0,1,1,0,0)$
3. $O := (1,1,1,0,0,0,1,1,0)$
4. $O := (1,1,1,0,0,1,1,1,0)$
5. $O := (1,1,1,1,0,0,1,1,0)$

In diesen Zuständen existieren isolierte Elfen, die von Elfen mit anderer Meinungen umgeben sind. Die isolierten Elfen übernehmen jedoch im Laufe der Diskussion die Meinung ihrer Nachbarn fast sicher. Sobald einer der isolierten Elfen überzeugt ist, zieht er die anderen nach. Im Laufe der Diskussion ist die Wahrscheinlich verschwindet gering, dass niemand der isolierten Elfen aufgerufen wird. So konvergiert jeder anfängliche Zustand nach hinreichend langer Zeit zu einem der sechs stabilen Zustände.
Zusammenfassend sind die 6 stabilen Zustände die einzigen möglichen Endzustände, wobei in $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ der Fälle die Mehrheit für den Mandel-Weihnachtsmarkt entscheidet.

Illustration: Ivana Martić

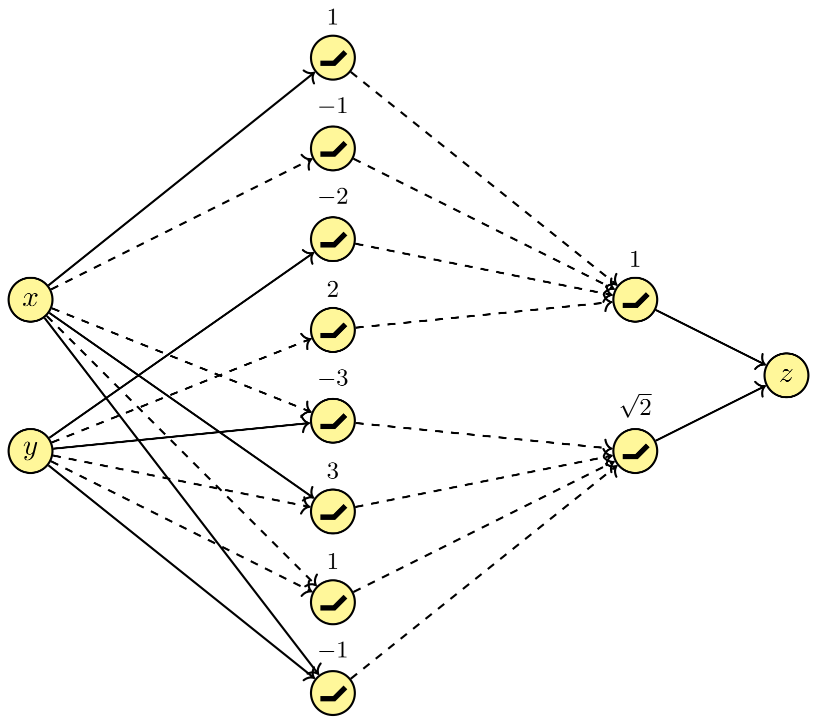
21 Weise dank KI?

Autoren: Moritz Grillo, Martin Skutella
Projekt: AA3-12: On the Expressivity of Neural Networks

Aufgabe

Vor langer Zeit gab es eine Geschichte von drei Weisen, die von einem Stern zu einem bestimmten Ort geführt wurden – eine Erzählung, die über Generationen weitergegeben wurde. Diese Idee mit dem Stern und den drei Weisen aus dem Morgenland hatte dem Abiturienten Geoffrey noch nie eingeleuchtet. Nicht, dass er den teils hanebüchenen Rest der Geschichte geglaubt hätte – in seinen Augen eine 2000 Jahre alte 'Urban Legend'. Aber die Sache mit dem Stern ließ ihm keine Ruhe. Zwar war Lichtverschmutzung vor 2000 Jahren wohl noch kein Thema, aber selbst bei klarem Sternenhimmel: Wie soll bitte ein weit entfernter Stern oder Komet den Weisen den genauen Weg gewiesen haben?
Daher beschloss Geoffrey gemeinsam mit seinem Freund John, das diesjährige Krippenspiel aufzupeppen und den heiligen drei Königen mit künstlicher Intelligenz den Weg zur Krippe zu weisen. Dazu hatten die beiden ein kleines neuronales Netz entwickelt, das sie in Form einer Handy-App an die vom Dorfpfarrer handverlesenen Darsteller der drei Könige verteilen wollten. Allerdings machten die drei weder einen weisen, geschweige denn einen heiligen Eindruck.
Umso interessierter zeigte sich Chantalle, die Darstellerin der heiligen Jungfrau Maria. Sie hatte laut Regie-Anweisung des Dorfpfarrers nur fromm zu schauen und das Reden ihrem Gatten Josef zu überlassen. Frustriert von dieser veralteten Rollenverteilung beschloss Chantalle, ihre Energie anderweitig einzusetzen: Sie half dabei, sicherzustellen, dass die sogenannten „Wei-

sen“ tatsächlich ihren Weg zum Zielort fanden - ein nicht ganz uneigennütziger Gedanke, da sie selbst schnellstmöglich aus dem ihr auferlegten frommen Dasein erlöst werden wollte.
„Die Sache ist eigentlich ganz einfach“, erklärte ihr John. „Man gibt die x- und y-Koordinate des eigenen Standorts in das neuronale Netz ein, das dann einen nicht-negativen Wert z ausgibt. Je größer z ist, desto näher ist man an der Krippe“.
„Und wie berechnet das neuronale Netz dieses z?“, fragte Chantalle neugierig, „und bei welchem Wert z hat man die Krippe erreicht?“ Bereitwillig zeigte Geoffrey ihr eine detaillierte Skizze vom Innenleben des neuronalen Netzes:



„Das Netz besteht aus untereinander verbundenen Neuronen“, erläuterte Geoffrey, „die hier durch gelbe Kreise und die Verbindungen durch Pfeile dargestellt sind. Die mit x und y beschrifteten Neuronen auf der linken Seite sind Input-Neuronen, deren Werte auf die x- und y-Koordinate gesetzt werden. Das mit z beschriftete Output-Neuron auf der rechten Seite gibt den Wert z aus. Dazwischen gibt es zwei Schichten mit versteckten Neuronen, in denen die eigentliche Berechnung stattfindet. Die erste Schicht besteht hier aus acht und die zweite aus zwei versteckten Neuronen.“
John fuhr fort: „Um die Werte der Neuronen einer Schicht zu berechnen, muss man zunächst die Werte der Neuronen der vorherigen Schicht kennen, die dann über die Pfeile an die nächste Schicht übertragen werden. Ein durchgezogener Pfeil sendet den Wert eines Neurons an das Neuron in der nächsten Schicht. Auch ein gestrichelter Pfeil überträgt diesen Wert, dreht dabei allerdings das Vorzeichen um, d.h. multipliziert ihn mit -1. Das empfangende Neuron addiert alle auf eingehenden Pfeilen übertragenen Werte zu der über dem Neuron angegebenen Zahl. Der Wert des empfangenden Neurons ist dann das Maximum von 0 und dieser Summe. Sind x und y die Werte der beiden Input-Neuronen, so ergeben sich beispielsweise die Werte der acht versteckten Neuronen in der ersten Schicht zu (von oben nach unten):

$$\max\{0, x+1\}$$
$$\max\{0, -x-1\}$$
$$\max\{0, y-2\}$$
$$\max\{0, -y+2\}$$
$$\max\{0, -x+y-3\}$$
$$\max\{0, x-y+3\}$$
$$\max\{0, -x-y+1\}$$
$$\max\{0, x+y-1\}$$

Die Werte der beiden versteckten Neuronen der zweiten Schicht ergeben sich nach derselben Regel aus den Werten der versteckten Neuronen der ersten Schicht. Der am Ende ausgegebene Wert z des Output-Neurons ist die Summe der Werte der beiden versteckten Neuronen aus der zweiten Schicht."

Fasziniert studierte Chantalle die Skizze und versuchte zu verstehen, was die intuitive Bedeutung der einzelnen Neuronen des Netzes ist. Geoffrey gab ihr den Tipp herauszufinden, für welche Koordinatenpaare x, y die beiden versteckten Neuronen der zweiten Schicht einen echt positiven Wert annehmen. „Daraus ergibt sich dann unmittelbar, für welche Paare x, y der resultierende Output z echt positiv ist", sagte er. Als Chantalle schließlich ein sternförmiges Gebilde auf ihren Zettel zeichnete, wusste Geoffrey, dass sie es verstanden hatte.

„Und jetzt weiß ich auch, bei welchem Koordinatenpaar (x, y) die drei Könige die Krippe finden, und wie groß der dort erreichte maximale Wert für z ist", sagte Chantalle, und ihr frommer Blick wich einem zufriedenen Grinsen.

Aufgabenstellung

Finde heraus

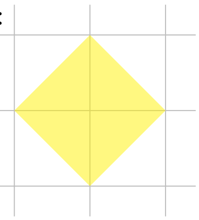
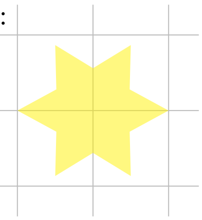
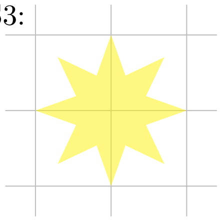
(i) welche der Skizzen S1 bis S9 in Abbildung 34 a) korrekt ist,

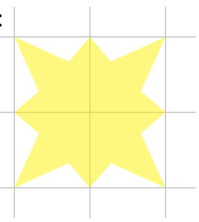
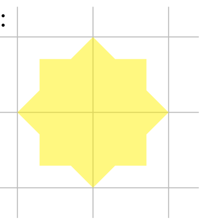
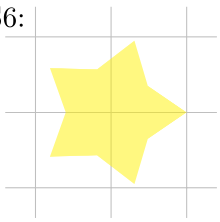
(ii) welcher der Werte W1 bis W9 in Abbildung 34 b) der korrekte Maximalwert für z ist, und

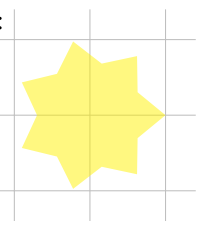
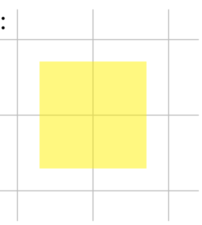
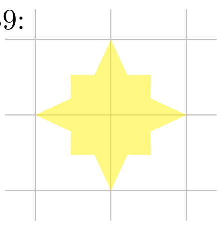
(iii) für welches Koordinatenpaar P1 bis P9 in Abbildung 34 c) der Maximalwert für z angenommen wird.

(*Abbildung auf nächster Seite*)

a) Mögliche Skizzen des Bereichs in der x-y-Ebene, wo $z > 0$
(Beachte, dass die Skizzen maßstabsgetreu sind):

S1:

S2:

S3:


S4:

S5:

S6:


S7:

S8:

S9:


b) Mögliche Maximalwerte für z:

W1: 0	W2: 1	W3: 2
W4: 3	W5: 4	W6: $\sqrt{2}$
W7: $\sqrt{2}+1$	W8: $\sqrt{2}+2$	W9: $2\sqrt{2}$

c) Mögliche Koordinatenpaare (x, y), bei denen z maximal ist:

P1: $(0,0)$	P2: $(0,1)$	P3: $(1,2)$
P4: $(2,1)$	P5: $(-1,2)$	P6: $(-2,1)$
P7: $(1,-2)$	P8: $(2,-1)$	P9: $(-1,-2)$

Abbildung 34: Mögliche Skizzen, Werte und Koordinatenpaare

Bei welcher der Antwortmöglichkeiten 1 bis 10 taucht das korrekte Tripel bestehend aus Skizze, Wert und Koordinatenpaar auf?

Antwortmöglichkeiten:

1. (S1,W1,P1) oder (S2,W2,P2) oder (S3,W3,P3) oder (S4,W4,P4)
2. (S5,W5,P5) oder (S6,W6,P6) oder (S7,W7,P7) oder (S8,W8,P8)
3. (S9,W9,P9) oder (S1,W3,P1) oder (S2,W4,P2) oder (S3,W5,P3)
4. (S4,W6,P4) oder (S5,W7,P5) oder (S6,W8,P6) oder (S7,W9,P7)
5. (S8,W1,P8) oder (S9,W2,P9) oder (S1,W2,P3) oder (S2,W3,P3)
6. (S3,W4,P5) oder (S4,W5,P6) oder (S5,W6,P7) oder (S6,W7,P8)
7. (S7,W8,P9) oder (S8,W9,P1) oder (S9,W1,P2) oder (S1,W5,P4)
8. (S2,W7,P5) oder (S3,W6,P6) oder (S4,W8,P7) oder (S5,W9,P8)
9. (S6,W1,P9) oder (S7,W2,P1) oder (S8,W3,P2) oder (S9,W4,P3)
10. (S1,W9,P5) oder (S2,W8,P6) oder (S3,W7,P5) oder (S4,W6,P8)

Projektbezug:

In unserem MATH$^+$ Forschungsprojekt mit dem Titel *On the Expressivity of Neural Networks* arbeiten wir an einem besseren strukturellen Verständnis neuronaler Netze. Ähnlich wie Chantalle in unserer Geschichte bemühen wir uns, die Eigenschaften eines gegebenen neuronalen Netzes zu verstehen. Und wir erforschen außerdem, welche Strukturen ein neuronales Netz haben sollte, um bestimmte Funktionen exakt berechnen zu können. Eines unserer Ergebnisse besagt zum Beispiel, dass neuronale Netze mit vielen versteckten Schichten deutlich komplexere Entscheidungsmuster (die Regionen, in denen das neuronale Netz einen positiven Wert annimmt) haben können als neuronale Netze mit wenigen versteckten Schichten.
Vor wenigen Wochen wurden Geoffrey Hinton von der University of Toronto (Kanada) und John Hopfield von der Princeton University (USA) mit dem Nobelpreis ausgezeichnet „*für grundlegende Entdeckungen und Erfindungen, die maschinelles Lernen mit künstlichen neuronalen Netzwerken ermöglichen*“.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 4.

Das richtige Tripel ist (S5,W7,P5).

Chantalle berechnet zunächst den Wert z_1, den das obere versteckte Neuron in der zweiten Schicht in Abhängigkeit von den Eingabewerten x und y annimmt. Dafür bildet sie die Summe der Werte der ersten vier Neuronen aus der ersten Schicht (oben im Aufgabentext gegeben), multipliziert diese mit -1, addiert 1 und berechnet das Maximum von dem Ergebnis und 0. Dabei hat sie beachtet, dass

$$\max\{0, x+1\} + \max\{0, -x-1\} = \max\{x+1, -x-1\} = |x+1|,$$

sowie

$$\max\{0, y-2\} - \max\{0, -y+2\} = \max\{y-2, -y+2\} = |y-2|$$

gilt. Die Summe der vier Neuronen entspricht also $|x+1| + |y-2|$ und dementsprechend gilt

$$z_1 = \max\{0, -|x+1| - |y-2| + 1\}$$

Für den Wert z_2, der an dem unteren Neuron in der zweiten Schicht angenommen wird, geht sie analog vor. Sie bildet die Summe der Werte der Neuronen 5-8 in der ersten Schicht, multipliziert diese mit -1, addiert $\sqrt{2}$ und berechnet das Maximum von dem Ergebnis und 0. Die Summe der vier Neuronen multipliziert mit -1 entspricht $-(|x-y+3| + |x+y-1|)$. Um den Term zu vereinfachen, nutzt Chantalle, dass

$$\pm(x-y+3) \pm (x+y-1) \leq |x-y+3| + |x+y-1|,$$

und mindestens einer der vier Fälle auf der linken Seite zur Gleichheit mit dem Term auf der rechten Seite führt. Sie berechnet die vier verschiedenen Fälle:

$$\begin{aligned}
(x-y+3) + (x+y-1) &= 2x+2 \\
(x-y+3) - (x+y-1) &= -2y+4 \\
-(x-y+3) + (x+y-1) &= 2y-4 \\
-(x-y+3) - (x+y-1) &= -2x-2
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich, dass

$$\begin{aligned}
-(|x-y+3| + |x+y-1|) &= -\max\{-2y+4, -2x-2, 2x+2, 2y-4\} \\
&= -2 \cdot \max\{\max\{y-2, -y+2\}, \max\{x+1, -x-1\}\} \\
&= -2 \cdot \max\{|y-2|, |x+1|\}
\end{aligned}$$

und damit

$$z_2 = \max\{0, -2 \cdot \max\{|y-2|, |x+1|\} + \sqrt{2}\}$$

Da der Betrag einer Zahl niemals negativ sein kann, gilt, dass

$$z_1 = \max\{0, -|x+1| - |y-2| + 1\} \leq \max\{0, 1\} = 1$$

und analog $z_2 \leq \sqrt{2}$ für alle x und y. Insbesondere gilt immer

$$z = z_1 + z_2 \leq 1 + \sqrt{2}.$$

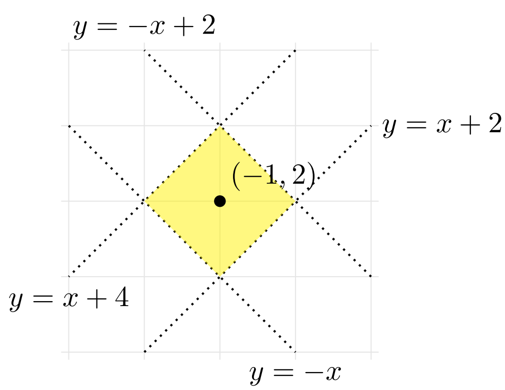
Andererseits gilt für $x = -1$ und $y = 2$, dass

$$|x+1| = |y-2| = 0$$

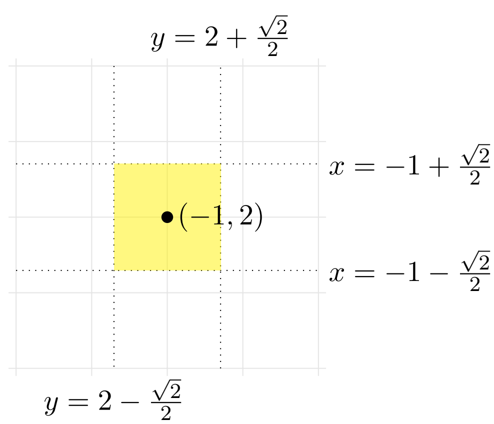
und folglich $z = 1+\sqrt{2}$. Für jedes andere Paar (x, y) gilt entweder $|x+1| > 0$ oder $|y-2| > 0$ und damit $z < 1+\sqrt{2}$. **Somit sind $(-1, 2)$ die eindeutigen Zielkoordinaten und der maximale Funktionswert beträgt $1 + \sqrt{2}$.**
Der Wert z_1 ist genau dann positiv, wenn $|x + 1| + |y - 2| < 1$. Das ist genau der Fall, wenn $\pm(x + 1) \pm (y - 2) < 1$ Chantalle betrachtet also die verschiedenen Fälle:

$$\begin{aligned}
(x+1)+(y-2) &= x+y-1 < 1 && \Longrightarrow y < -x+2\\
(x+1)-(y-2) &= x-y+3 < 1 && \Longrightarrow y > x+2\\
-(x+1)+(y-2) &= -x+y-3 < 1 && \Longrightarrow y < x+4\\
-(x+1)-(y-2) &= -x-y+1 < 1 && \Longrightarrow y > -x
\end{aligned}$$

Der Wert z_1 ist somit genau für die folgenden x und y positiv (im Bild gelb eingefärbt) und ansonsten 0 (im Bild weiß eingefärbt).



Der Wert $z_2 = \max\{0, -2 \cdot \max\{|y-2|, |x+1|\} + \sqrt{2}\}$ ist positiv genau dann, wenn $\max\{|y - 2|, |x + 1|\} < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Das sind genau die Punkte (x, y), für die $|y - 2|, |x + 1| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ gilt.



Da $z = z_1 + z_2$ und z_1 und z_2 niemals negativ sein können, gilt für alle Punkte (x, y) dass $z > 0$ genau dann, wenn entweder z_1 oder z_2 (oder beide) positiv sind. Deshalb sind die Punkte (x, y) an denen das neuronale Netz einen positiven Wert ausgibt die Überlagerung der beiden gelben Vierecke für z_1 und z_2. **Das ergibt den folgenden Stern und somit ist S5 die korrekte Skizze.**

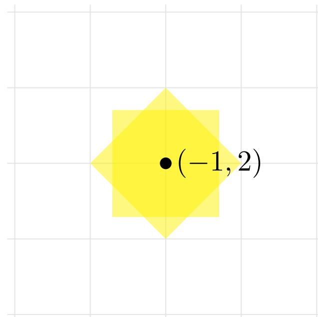


Illustration: Zyanya Santuario

22 Karten ablegen

Autorin: Anne Zander (Universität Twente)

Aufgabe

Die beiden Wichtel Atto und Bilbo wurden mit dem Einpacken von Geschenken beauftragt. Statt zu arbeiten, bewundern sie lieber die Geschenke. Gerade haben sie das Kartenspiel „Uno“ entdeckt und spielen ihre dritte Runde. Atto verliert schon wieder. Frustriert wirft er die Karten auf den Tisch. Dann beginnt er zu überlegen: „In den meisten Kartenspielen haben die Karten verschiedene Attribute, wie zum Beispiel eine bestimmte Farbe und ein bestimmtes Symbol. Angenommen, ich habe ein Kartenspiel mit n Farben und m Symbolen, wobei $n \geq 2$ und $m \geq 2$ ist. Jede Farb-Symbol-Kombination kommt genau einmal als Karte vor.
Als einziger Spieler ziehe ich eine Anzahl x, wobei $x \geq 2$), Karten zufällig aus dem gesamten Spiel. Kann ich diese x Karten immer so anordnen, dass sie nacheinander abgelegt werden können, egal welche Karten ich gezogen habe?“ Mit „ablegen“ meint Atto, dass, nachdem er die erste Karte abgelegt hat, jede nachfolgende Karte entweder die gleiche Farbe oder das gleiche Symbol wie die zuvor abgelegte Karte haben muss. Es sei $x_{n,m}$ die Mindestanzahl von gezogenen Karten in einem Kartenspiel mit n Farben und m Symbolen, sodass es immer möglich ist, eine erlaubte Reihenfolge für das Ablegen zu finden. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

Antwortmöglichkeiten:

1. $x_{n,m} = (n-1)(m-1)$
2. Eine Ablegesequenz kann immer für jede Auswahl x gezogener Karten gefunden werden.
3. $x_{n,m} = (n-2)(m-2)$
4. In einem Kartenspiel mit 4 Farben und 10 Symbolen kann man eine Auswahl von 30 Karten finden, sodass keine Ablegesequenz möglich ist.
5. $x_{n,m} = (n-1)m - 3$
6. In einem Kartenspiel mit 3 Farben und 6 Symbolen kann eine Sequenz von 10 Karten immer abgelegt werden.
7. $x_{n+1,m} = x_{n,m} + m + 1$
8. $x_{n+1,m+1} = x_{n,m} + m + n - 4$
9. Es gilt, dass $x_{4,6} = x_{3,8}$
10. $x_{n,m+1} = x_{n,m} + n - 1$

Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Wir präsentieren zwei verschiedene Lösungswege. Der erste Lösungsweg basiert auf dem Ausschlussprinzip. Im zweiten Lösungsweg wird bewiesen, dass die minimale Anzahl $x_{n,m}$ von Karten in einem Kartenspiel mit n Farben und m Symbolen, die benötigt wird, um eine Folge zu finden, in der alle Karten abgelegt werden können, gleich $nm - n - m + 3$ ist. Diese Formel ist äquivalent zu Antwortmöglichkeit 10, wie sich leicht überprüfen lässt.

A) Ausschlussprinzip

Wir benennen die Farben mit den Zahlen $1,\ 2,\ 3, \ldots$ und die Symbole mit $a,\ b,\ c, \ldots$. Betrachte das folgende Gegenbeispiel mit $n = m = 2$:

Gegenbeispiel 1
Zuerst stellen wir fest, dass $x_{2,2} > 2$ gelten muss, da die Karten $1a$ und $2b$ nicht direkt hintereinander abgelegt werden können. Für drei Karten gibt es jedoch mindestens eine Karte, die ein Symbol mit einer anderen Karte und eine Farbe mit der verbleibenden Karte teilt. Daher können alle drei Karten abgelegt werden, wenn diese Karte als zweite Karte abgelegt wird. Folglich gilt $x_{2,2} = 3$.
Daraus folgt, dass die Antworten 1, 3, 4 und 5 falsch sind.

Gegenbeispiel 2
Betrachte diesmal den Fall $n = 3$ und $m = 2$. Es gibt also 6 Karten. Wenn Antwort 7 korrekt wäre, dann wäre $x_{3,2} = 3 + 2 + 1 = 6$. Von den insgesamt 6 Karten im Spiel kann jedoch auch jede Kombination aus 5 zufällig gewählten Karten abgelegt werden. Demnach kann 6 nicht die kleinste Anzahl sein.
Daraus folgt, dass die Antwort 7 falsch ist.

Gegenbeispiel 3
Betrachte diesmal den Fall $n = m = 3$. Wenn Antwort 8 korrekt wäre, dann wäre $x_{3,3} = 3 + 2 + 2 - 4 = 3$.
Wenn von den neun Karten aber die drei Karten $1a$, $2b$ und $3c$ zufällig gezogen werden, dann können diese nicht hintereinander direkt abgelegt werden.
Daraus folgt, dass die Antwort 8 falsch ist.

Ausschluss Antwortmöglichkeit 9
Betrachte ein Spiel aus 24 Karten mit $n = 4$, $m = 6$.
Zuerst, stellen wir fest, dass $x_{4,6} > 16$, da die Karte $(4, f)$ nicht in einer Reihenfolge abgelegt werden kann, wenn die anderen Karten nur die Zahlen eins bis drei und die Symbole a bis e enthalten. Wir zeigen, dass 16 Karten in einem Deck mit drei Farben und acht Symbolen immer abgelegt werden können.
Fall 1: Falls unter diesen 16 Karten nur zwei Farben vorkommen, ist dies offensichtlich.
Fall 2: Betrachte den Fall, bei dem jede Farbe unter den 16 gezogenen Karten mindestens einmal vorkommt.

1. Dann gibt es mindestens vier verschiedene Kartenpaare mit jeweils demselben Symbol.

2. Dann hat jede Farbe mindestens ein Symbol, das auch in einer anderen Farbe vorkommt.

Wir zeigen beides mit Widerspruch: Falls 1. nicht zutreffen würde, gäbe es entweder höchstens ein Symbol, das in allen drei Farben erscheint, oder höchstens drei Symbole, die in genau zwei Farben vorkommen. Wenn wir in diesem Fall die maximale Anzahl an Karten zählen, basierend auf der Vielfachheit der Symbole, ergeben sich maximal

$$3 + 7 \cdot 1 = 10$$

Karten (für ein Symbol in drei Farben und maximal sieben weitere in höchstens einer Farbe) oder

$$3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 11$$

Karten (für drei Symbole in je zwei Farben und maximal fünf weitere in höchstens einer Farbe). Beide Möglichkeiten widersprechen der Annahme von 16 Karten.
Falls 2. nicht zutreffen würde, gäbe es eine Farbe, die keine Symbole mit den anderen zwei Farben gemeinsam hat. Wenn wir die Anzahl der Karten in dieser Farbe l nennen, können die anderen beiden Farben jeweils höchstens $8 - l$ Karten haben, was insgesamt höchstens

$$l + 2(8 - l) = 16 - l$$

Karten ergibt, also erneut weniger als die angenommenen 16 Karten. Auch dies ist ein Widerspruch.
Aus 1. und 2. folgt, dass es mindestens zwei Symbole gibt, die jeweils in zwei verschiedenen Farben vorkommen, sodass alle Farben zusammen mit mindestens einem dieser Symbole genutzt werden. Wir können die Symbole so benennen, dass sie a und b heißen. Außerdem können wir die Farben so benennen, dass die Karten $1a$ und $2a$ sowie $2b$ und $3b$ unter den 16 Karten vorkommen. Nun lässt sich leicht eine Ablegereihenfolge der 16 Karten finden.

Daraus folgt, dass die Antwort 9 falsch ist.

Ausschluss Antwortmöglichkeit 2
Um die Antwortmöglichkeit 2 auszuschließen, können wir die Anzahl der Symbole betrachten, die in allen vier Farben vorkommen. Beachte zunächst, dass unter den gewählten Karten mindestens 20 Paare von Karten mit passenden Symbolen existieren müssen (ähnlich wie das vorherige Argument).
Fall 1: Drei oder mehr Symbole kommen in jeder Farbe vor. In diesem Fall können wir einfach alle Karten jeder Farbe ablegen, wobei wir eines der oben genannten Symbole zuletzt ablegen, um dann zu einer anderen Farbe zu wechseln.
Fall 2: Genau zwei Symbole kommen in jeder Farbe vor. Dann muss es ein weiteres Symbol geben, das in mindestens zwei Farben vorkommt. Wir können zuerst die Karten dieser Farben ablegen, wobei wir das gerade genannte Paar verwenden, um von einer Farbe zur anderen zu wechseln. Danach können wir alle anderen Karten gleicher Farbe ablegen und von einer Farbe zur anderen wechseln, indem wir eines der beiden Symbole verwenden, die in jeder Farbe vorkommen.
Fall 3: Genau ein Symbol kommt in jeder Farbe vor. Dann gibt es mindestens zwei weitere Symbole, die in einem der 20 Paare mit gleichen Symbolen vorkommen. Außerdem können wir sogar zwei Paare unter ihnen wählen, die nicht genau dieselben Farben verwenden, da es andernfalls keine 20 Paare mit jeweils gleichen Symbolen geben könnte. Ähnlich wie in

den obigen Fällen können wir alle Karten ablegen, indem wir von einer Farbe zur anderen wechseln, wo immer dies möglich ist, und ansonsten das Symbol verwenden, das in jeder Farbe vorkommt.
Fall 4: Kein Symbol kommt in jeder Farbe vor. Dann kommt jedes Symbol in genau drei Farben vor. Entweder hat eine Farbe kein Symbol, in diesem Fall ist es sehr einfach, alle Karten abzulegen. Andernfalls hat jede Farbe mindestens ein Symbol, das auch in zwei anderen Farben vorkommt. Da es 10 Symbole gibt, muss mindestens eine Farbe drei Symbole haben. Unter diesen Farben können wir die Farbe mit den meisten Symbolen auswählen, die wir Farbe „1“ nennen. Jede andere Farbe muss ein Symbol haben, das auch in Farbe „1“ vorkommt, da jede Farbe mindestens ein Symbol hat und andernfalls eine der verbleibenden Farben mehr Symbole hätte als Farbe „1“. Jetzt gibt es höchstens eine Farbe, die nur ein Symbol mit Farbe „1“ teilt, andernfalls könnte es keine Farbe „1“ mit drei oder mehr Symbolen geben. Wir können beginnen, die Karten einer Farbe abzulegen, die die wenigsten Symbole mit Farbe „1“ teilt und dann zu Farbe „1“ wechseln. Das Symbol, welches zum Wechseln benutzt wird, bezeichnen wir mit „a“ . Die anderen zwei Farben haben neben „a“ jeweils mindestens ein weiteres Symbol, das auch in Farbe „1“ vorkommt. Eines dieser beiden Farben muss sogar zwei weitere Symbole haben, die auch in „1“ vorkommen, da sonst nicht alle 10 Symbole unter den 20 Karten auftauchen könnten. Somit ist es nicht schwer zu sehen, dass alle Karten abgelegt werden können.

B) Beweis mit Graphentheorie

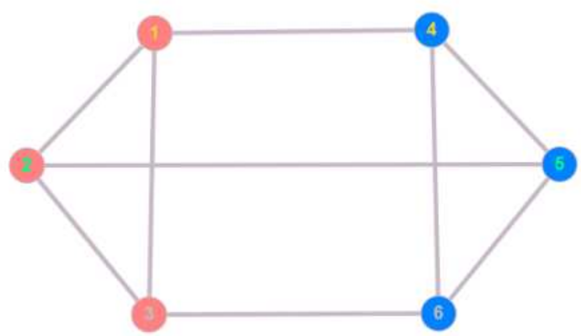


Abbildung 35: Kartenspielgraph für zwei Farben und drei Symbole

In diesem Beweis repräsentieren wir jede Karte im Kartenspiel als einen Knoten in einem Graphen. Zwei Knoten sind durch eine Kante verbunden, wenn die entsprechenden Karten dieselbe Farbe oder dasselbe Symbol teilen. Wenn wir nur x Karten aus dem Kartenspiel betrachten, entspricht dies einem Teilgraphen, der nur die Knoten und Kanten enthält, die mit den x gewählten Karten assoziiert sind. Eine gültige Sequenz von Karten wird zu einem **Pfad** im Graphen — einer Abfolge von Knoten, die durch Kanten verbunden sind und jeden Knoten genau einmal enthält. In der Graphentheorie wird ein solcher Pfad als **Hamiltons'cher Pfad** bezeichnet.
Um unsere Behauptung zu beweisen, formulieren wir zwei Teilbehauptungen, die als eine untere und obere Schranke dienen:

1. Es existiert ein Teilgraph (genannt G_1) des Kartenspiel-Graphen mit $x = nm-n-m+2$ Knoten, der keinen Hamilton'schen Pfad enthält.
2. Jeder Teilgraph des Kartenspiel-Graphen mit $x = nm-n-m+3$ Knoten enthält einen Hamilton'schen Pfad.

Als Beispiel zeigt Abbildung 35 den Kartenspiel-Graphen für zwei Farben (Knoten mit orangefarbenem und blauem Hintergrund) und drei Symbole (dargestellt durch die Textfarben der Knotennummern: Gelb, Grün und Grau).

Struktur des Kartenspiel-Graphen

Der Kartenspiel-Graph enthält nm Knoten, da jede Farb-Symbol-Kombination genau einmal vorkommt. Außerdem ist jeder Knoten mit $n+m-2$ anderen Knoten verbunden:

- $n-1$ Knoten derselben Farbe.
- $m-1$ Knoten desselben Symbols.

Beweis von Teilbehauptung 1

Um die erste Teilbehauptung zu beweisen, wählen wir einen beliebigen Knoten, nennen wir ihn K, aus und löschen alle $n+m-2$ Knoten, die mit ihm verbunden sind. Dadurch bleibt ein Teilgraph mit $nm-n-m+2$ Knoten übrig. Dieser Teilgraph entspricht genau dem Graphen G_1 aus der Behauptung. In diesem Teilgraph wird der ausgewählte Knoten K isoliert (ohne Kanten), was bedeutet, dass er nicht Teil eines Hamilton'schen Pfades sein kann. Somit existiert in diesem Teilgraph kein Hamilton'scher Pfad.

Beweis von Teilbehauptung 2

Nun beweisen wir die zweite Teilbehauptung. Alle Knoten, die Karten derselben Farbe (oder desselben Symbols) entsprechen, bilden eine Clique. In einer Clique ist jedes Knotenpaar durch eine Kante verbunden. Innerhalb einer solchen Clique ist es immer möglich, einen Hamilton'schen Pfad zu finden, der eine direkte Verbindung zwischen zwei beliebigen Knoten darstellt.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $n < m$ gilt, ansonsten können wir einfach die Rollen von Farben und Symbolen vertauschen. Anstatt mit dem gesamten Kartenspiel-Graphen zu arbeiten, betrachten wir einen reduzierten Graphen, in dem jede Farb-Clique durch einen **Meta-Knoten** repräsentiert wird. Ein Meta-Knoten fasst alle Knoten einer Clique zusammen und wird als ein einzelner Knoten im *reduzierten* Graphen dargestellt. Zwei Meta-Knoten sind verbunden, wenn mindestens ein ursprünglicher Knoten aus jeder Clique im ursprünglichen Graphen verbunden ist. Das heißt, wenn zwei Knoten aus zwei verschiedenen Cliquen ein Symbol teilen.

In dem reduzierten Graphen aus dem gesamten Deck gilt:

- Es gibt n Meta-Knoten.
- Der Graph ist vollständig verbunden, das heißt, jeder Meta-Knoten ist mit jedem anderen Meta-Knoten verbunden.

Wir zeigen, dass selbst nach dem Löschen von $n+m-3$ Knoten ein solcher Pfad im entsprechenden reduzierten Graphen immer existiert.
Das Löschen von Knoten wirkt sich wie folgt auf den reduzierten Graphen aus:

1. Um eine Kante zwischen zwei Meta-Knoten zu löschen, müssen mindestens m ursprüngliche Knoten (je einer für jedes Symbol) gelöscht werden.

2. Da $n < m$ gilt, ist es unmöglich, zwei oder mehr Kanten im reduzierten Graphen zu löschen, ohne das Löschlimit von $n+m-3$ Knoten zu überschreiten. Um alle Kanten zu einem Meta-Knoten zu löschen, wären erforderlich:
   - $m-1$ Löschungen innerhalb der gemeinsamen Clique.
   - $n-1$ zusätzliche Löschungen (jeweils eine in den anderen Cliquen).

Dies erfordert $n+m-2$ Löschungen, was größer ist als $n+m-3$. Daher bleibt im reduzierten Graphen immer mindestens eine Kante, was die Existenz eines Hamilton'schen Pfades garantiert. Ein Hamilton'scher Pfad im reduzierten Graphen kann immer zu einem Hamilton'schen Pfad im ursprünglichen Kartenspiel-Graphen erweitert werden, indem der Hamilton'schen Pfade aus dem reduzierten Graphen auf die Knoten des ursprünglichen Graphen zurückübersetzt wird, wobei die Karten innerhalb jeder Farb-Clique in einer gültigen Reihenfolge abgelegt werden.

Schlussfolgerung

Aus diesen Argumenten folgt, dass die Antworten 1–9 falsch sind und Antwort 10 korrekt ist. Genauer:

$$x_{n,m} = nm - n - m + 3.$$

Die Differenz zwischen den minimalen Kartenanzahlen für $m+1$ und m beträgt:

$$x_{n,m+1} - x_{n,m} = n(m+1) - n - (m+1) + 3 - (nm - n - m + 3) = n - 1.$$

Ähnlich für $n+1$ statt $m+1$:

$$x_{n+1,m+1} - x_{n,m} = (n+1)(m+1) - (n+1) - (m+1) + 3 - (nm - n - m + 3) = n + m - 2.$$

Illustration: Julia Nurit Schönnagel

23 Elfenfußball

Autor: Dante Luber (BMS, Goethe-Universität Frankfurt)

Aufgabe

Die Elfen, die fleißig Geschenke für den Weihnachtsmann einpacken, möchten in ihrer Freizeit Fußball spielen. Sie haben den Weihnachtsmann mehrfach um einen Fußball gebeten, doch aufgrund des knappen Budgets in diesem Jahr weigert er sich, einen zu kaufen. Ein schlauer Elf namens Mo, der Geschenkboxen herstellt, hat die brillante Idee, den Fußball selbst zu basteln. Mo hat Zugang zu einer Maschine, die verschiedene Körpernetze (2D-Formen) auf festes Papier drucken kann.
Mo ist sich jedoch unsicher, welches Netz er drucken soll, damit es zu einem Ball gefaltet und zusammengeklebt werden kann. Daher fragt er die schlaue Elfe Mara um Rat.
Mara antwortet: „Ich kann dir kein Design garantieren, das einen perfekten Ball ergibt, aber ich kenne ein cooles Objekt, das ihr zum Spielen verwenden könnt.“
Sie zeigt Mo ein Bild des Körpers, den sie für das Spiel basteln können (siehe Abbildung 36). Begeistert fragt Mo Mara nach dem Entwurf des Designs. Mara geht ins Büro und sucht in ihrem Computer nach der Datei von dem Netz für diesen Körper. Leider kann sie sich nicht mehr erinnern welche Nummer der Entwurf hat. Sie ist sich aber sicher, dass er sich unter diesen 8 Entwürfen befindet und druckt alle 8 möglichen Netze aus. Mo muss selbst herausfinden welches der unten gezeigten Netze zu dem Objekt in Abbildung 36 passt. Welches Netz (1) bis (8) muss Mo wählen, sodass es zu diesem Objekt gefaltet werden kann?

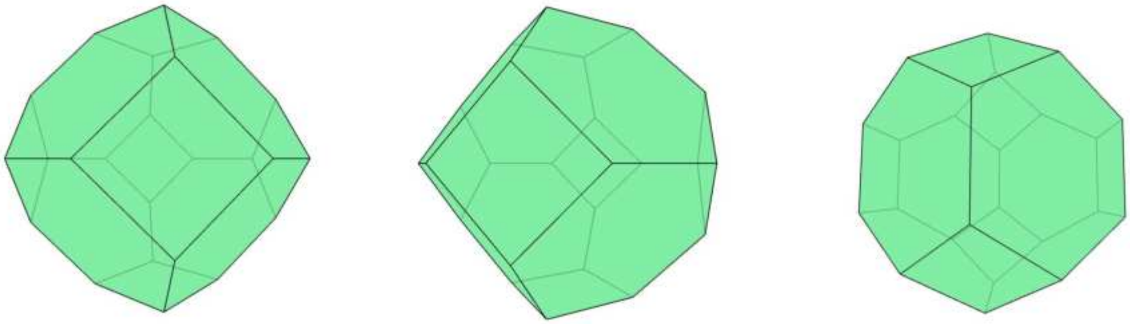


Abbildung 36: Drei 3D-Bilder des finalen Fußballs aus verschiedenen Blickwinkeln.

Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. Alle
10. Keines

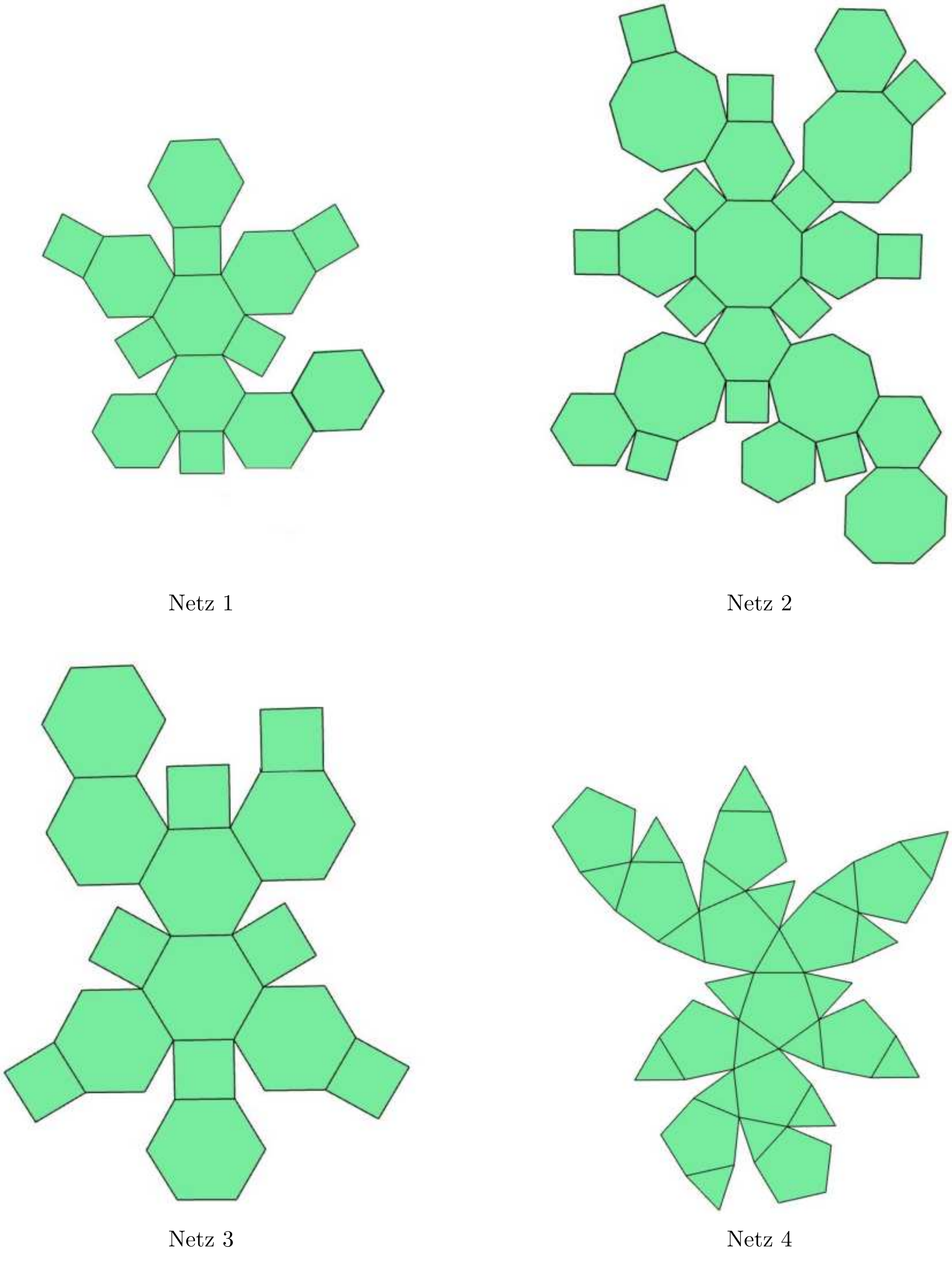
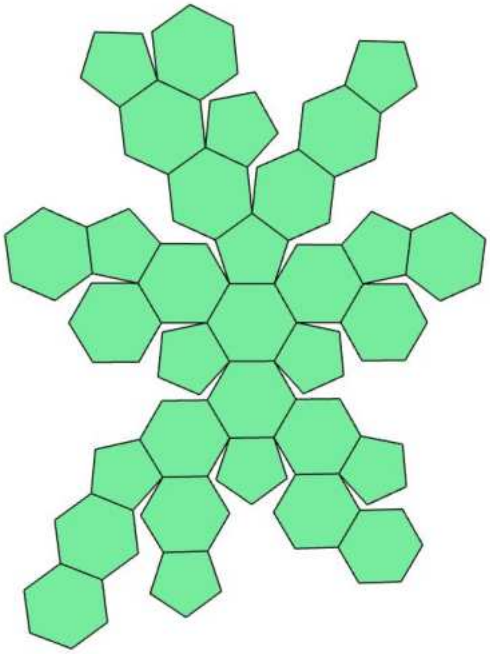
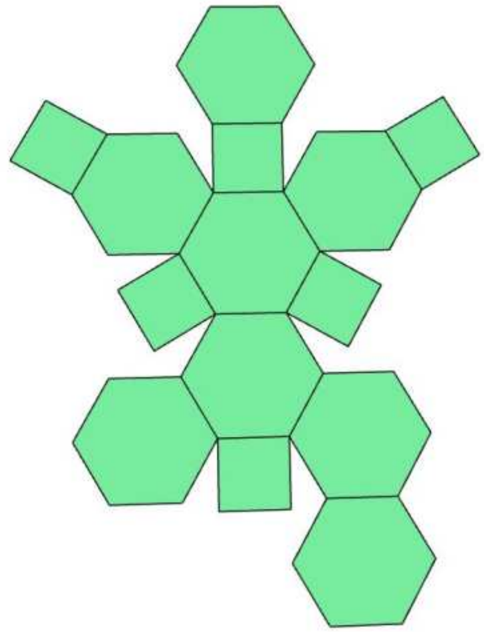


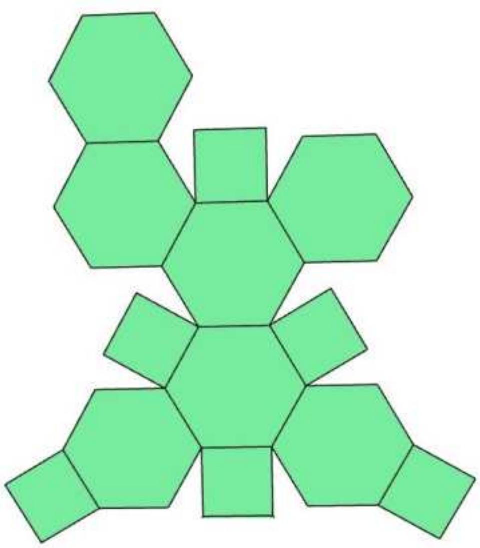
Abbildung 37: Antwortmöglichkeiten (1) - (4).



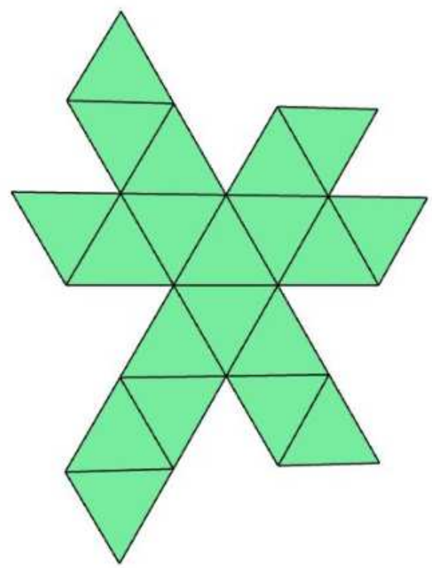
Netz 5



Netz 6



Netz 7



Netz 8

Abbildung 38: Antwortmöglichkeiten (5) - (8).

Projektbezug

- Die Abbildungen wurden mit `OSCAR` erstellt — **O**pen **S**ource **C**omputer **A**lgebra **R**esearch System, Version 1.0.0, entwickelt vom `OSCAR`-Team, 2024.
- Das `OSCAR`-Projekt wird im Rahmen des TRR 195 zu einem visionären Open-Source-Computeralgebrasystem der nächsten Generation entwickelt, das die kombinierten mathematischen Fähigkeiten der zugrunde liegenden Systeme übertrifft.
- `OSCAR` ermöglicht es Nutzern, neue mathematische Objekte effizient zu konstruieren, indem vorhandene Bausteine aus den einzelnen Kernkomponenten kombiniert werden. Diese Objekte erhalten dadurch mathematische Fähigkeiten, die über die der individuellen Systeme hinausgehen, auf eine transparente Weise.
- Für weitere Informationen oder wenn Sie `Oscar` selbst nutzen möchten, besuchen Sie https://www.oscar-system.org.
- Diese Aufgabe wurde inspiriert von MatchTheNet, einem kostenlosen Online-Spiel zur polyhedralen Geometrie, das vom `polymake`-Team entwickelt wurde. Sie können das vollständige Spiel unter https://www.matchthenet.de/ spielen.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

- *Konvexe Polytopen* verallgemeinern Quadrate, Würfel, Hexagone, Tetraeder und andere Formen mit starren Seiten. Das Polyeder in Abbildung 36 ist das 3-dimensionale *Permutaeder*. Die *Ecken* entsprechen allen *Permutationen* (Umordnungen) des Vektors $(1, 2, 3, 4)$.
- Zuerst bemerken wir, dass der „Fußball“ in Abbildung 36 aus gleich großen Hexagonen und Quadraten besteht. Daher schließen wir Netz 2, Netz 4, Netz 5 und Netz 8 aus. Der Fußball hat 8 hexagonale Flächen und 6 quadratische Flächen. Dies eliminiert Netz 3 und Netz 7.
- Betrachten wir das rechte Hexagon von Netz 1. Falls wir es an das benachbarte Quadrat anfügen, würden die Ecken von drei Hexagonen mit der Ecke eines Quadrats zusammentreffen, was nicht möglich ist.

Illustration: Friederike Hofmann

24 Elfen und der Lebkuchenschlucker

Autor: Filip Blašković (ZIB)

Aufgabe

An einem verschneiten Wintertag reiste eine Gruppe fleißiger Elfen durch den verzauberten Wald, ihre Schlitten beladen mit süßen Geschenken aus der berühmten Nordpol-Bäckerei. Doch diese waren keine gewöhnlichen Geschenke — die Elfen hatten fünf köstliche Sorten von Plätzchen mit großer Sorgfalt zubereitet: Ingwer, Honig, Zimt, Kardamom und Muskatnuss. Tausende von Boxen, sorgfältig beschriftet und auf den Schlitten gestapelt, waren für den Weihnachtsmann bestimmt, der sie an Kinder auf der ganzen Welt verteilen musste. Die Elfen beeilten sich, das Zuhause des Weihnachtsmanns im Tal zu erreichen, bevor es zu spät war, seine Weihnachtsreise zu beginnen.

Gerade als sie den Wald verlassen und ins Tal eintreten wollten, geschah etwas Unerwartetes. Ein riesiges, zimtfarbenes Weihnachtsmonster namens *Lebkuchenschlucker* sprang hinter einem Busch hervor und landete direkt vor dem Schlitten der Elfen! Mit einem schelmischen Grinsen riss das gierige Monster alle Plätzchenboxen auf einen Schlag an sich. Es wollte gerade wieder in die Tiefen des Waldes verschwinden, als die Elfen schnell reagierten und flehentlich baten.

„Bitte!“ riefen sie. „Der Weihnachtsmann wartet auf diese Geschenke; er muss bald los, um sie an alle Kinder zu verteilen. Könnten wir wenigstens einige der Boxen zurückbekommen?“

Lebkuchenschlucker hielt inne und kratzte sich nachdenklich am Kinn. Nach einem Moment lächelte er verschmitzt und sagte: „Gut, ich gebe euch eine Chance. Aber nur, wenn ihr bereit seid, ein Spiel zu spielen.“

Die Elfen warfen sich nervöse Blicke zu, wussten aber, dass sie keine Wahl hatten. Sie nickten zustimmend.
Das Monster erklärte die Regeln: „So funktioniert es,“ sagte er. „Jeder von euch bekommt eine Plätzchenbox, aber das Etikett auf eurer eigenen Box wird verborgen sein. Ihr könnt jedoch die Etiketten auf den Boxen der anderen Elfen sehen, aber nicht das eigene.“

1. Zuerst legt ihr eine Strategie fest.
2. Danach erhaltet ihr eure Geschenke.
3. Schließlich werde ich euch nacheinander in einer von mir bestimmten Reihenfolge aufrufen, und wenn ich euch aufrufe, müsst ihr laut, für alle hörbar, den Geschmack der Plätzchen in eurer Box erraten. Natürlich wird allen bekannt sein, welcher Elf gerade an der Reihe ist.

„Sobald das Spiel beginnt, dürft ihr nur sprechen, wenn ich es euch erlaube, und selbst dann dürft ihr nur euren Plätzchengeschmack raten. Am Ende des Spiels dürfen diejenigen, die richtig raten, ihre Box behalten und sie dem Weihnachtsmann bringen. Wer falsch rät, muss zur Bäckerei zurückkehren, um eine neue zu holen.“
Das Monster fügte dann noch hinzu: „Oh, und denkt nicht, dass ihr euch auf das Zählen der Geschmacksrichtungen verlassen könnt — ich habe weitaus mehr Plätzchenboxen versteckt, als es von euch gibt! Ihr müsst euch auf das Hören und euer Gedächtnis verlassen.“
Die Elfen hockten sich zusammen und dachten angestrengt nach. Wie sollten sie das Spiel spielen, um so viele Boxen wie möglich zu behalten?
Fragen:

1. Wenn es 100 Elfen gibt, wie viele Plätzchenboxen können sie mit der optimalen Strategie garantiert zurückgewinnen?
2. Was ist die Antwort auf dieselbe Frage, wenn die 100 Elfen dasselbe Spiel spielen, aber diesmal in fünf Freundeskreise von je 20 Elfen aufgeteilt werden, bevor sie eine Strategie festlegen können? In dieser Version kann kein Elf innerhalb eines Freundeskreises die Etiketten der Boxen seiner Freunde während des Spiels sehen, wohl aber die Etiketten aller anderen Elfen in den anderen Gruppen. Allerdings dürfen alle 100 zusammen eine Strategie ausarbeiten, nachdem sie ihre Freundeskreise kennen, aber bevor sie die Plätzchenboxen erhalten. Verändert dies das Ergebnis, und wenn ja, wie?

Antwortmöglichkeiten:

1. 50 und 20
2. 50 und 40
3. 95 und 90
4. 97 und 80
5. 96 und 80
6. 96 und 96
7. 99 und 0
8. 99 und 80
9. 99 und 95
10. 100 und 100

Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Erste Frage. Offensichtlich können die Elfen nicht garantieren, dass alle 100 Antworten korrekt sind, da der zuerst aufgerufene Elf keine Informationen über den möglichen Geschmack seiner Box hat. Die Elfen können jedoch 99 korrekte Antworten mit der folgenden Strategie garantieren: Sie weisen den Geschmacksrichtungen vor Beginn des Spiels die Zahlen $0, 1, 2, 3, 4$ zu. Zum Beispiel: Ingwer - 0, Honig - 1, Zimt - 2, Kardamom - 3, Muskatnuss - 4. Dann raten sie wie folgt:

- *Erster Elf.* Der erste Elf, der rät (nennen wir ihn Albert), hat keine Informationen über den Geschmack seiner Box, daher kann nicht garantiert werden, dass er richtig rät. Alberts Rateversuch dient jedoch dazu, den anderen Elfen wichtige Informationen zu liefern, die ihnen helfen, den Geschmack ihrer Box zu bestimmen. Alberts Strategie besteht darin, die Summe aller Geschmacksrichtungen (d. h. der zugewiesenen Zahlen) aller Elfen, die er sieht, zu bilden – bezeichnen wir diese Summe mit A – und dann den Geschmack $A \mod 5$ zu raten (da es insgesamt 5 Geschmacksrichtungen gibt). Danach hat jeder weitere Elf genügend Informationen, um den Geschmack seiner Box zu bestimmen.

- *Alle anderen Elfen.* Jeder andere Elf, nennen wir ihn Benjamin, hört Alberts Antwort, was ihm genügend Informationen gibt, um den Geschmack seiner eigenen Box korrekt zu identifizieren. Sei B die Summe aller Boxen, die Benjamin vor dem Start des Spiels gesehen hat, mit Ausnahme von Alberts Box. Beachten Sie, dass die Geschmacksrichtungen in B genau die Geschmacksrichtungen sind, die Albert sieht, mit Ausnahme des Geschmacks von Benjamins Plätzchen. Daher gilt, wenn r der Geschmack von Benjamins Plätzchen ist:

  $$B + r = A,$$

  da r jedoch zwischen null und vier liegt, gilt offensichtlich $r = r \text{ mod } 5$. Aber Vorsicht! Benjamin hört tatsächlich nicht A, sondern den von Albert geratenen Plätzchengeschmack, nämlich A mod 5. Nun müssen wir zeigen, dass

  $$A - B \equiv_5 (A \text{ mod } 5) - B.$$

  Wir können A als $5k + (A \text{ mod } 5)$ schreiben, für ein beliebiges ganzzahliges k. Setzen wir dies in die obige Gleichung ein, erhalten wir die äquivalente Formulierung der Frage:

  $$5k + (A \text{ mod } 5) - B \equiv_5 (A \text{ mod } 5) - B.$$

  Dies ist offensichtlich wahr, da $5k \equiv_5 0$.

  Daher kann Benjamin den Geschmack seiner Plätzchen korrekt erraten, indem er den Namen des Geschmacks angibt, der der Zahl

  $$r \equiv_5 (A \text{ mod } 5) - B$$

  entspricht, was der richtige Geschmack ist.

Zweite Frage.

- *Die Elfen können nicht mehr als 80 korrekte Antworten garantieren.* Zunächst beobachten wir, dass es eine Reihenfolge gibt, in der der *Lebkuchenschlucker* die Elfen aufrufen kann, sodass die ersten 20 keine Informationen haben. Daher können wir nicht garantieren, dass mehr als 80 Elfen ihren Geschmack korrekt erraten. Der *Lebkuchenschlucker* kann besonders listig spielen und die ersten 20 Elfen aus demselben Freundeskreis aufrufen. Zeigen wir jedoch, dass die Elfen eine Strategie entwickeln können, die sicherstellt, dass unabhängig von der Reihenfolge, in der sie aufgerufen werden, 80 von ihnen richtig raten.

- *Die Elfen können eine Strategie entwickeln, die mindestens 80 korrekte Antworten garantiert:* Vor Beginn des Spiels einigen sie sich darauf, sich in 20 Teams mit jeweils fünf Elfen aufzuteilen, wobei jedes Team einen Elf aus jedem der fünf Freundeskreise enthält. Diese Anordnung ermöglicht es jedem Team, unabhängig von allen anderen Elfen zu spielen. Innerhalb jedes Teams kann jeder Elf alle anderen Teammitglieder sehen, da niemals zwei Freunde demselben Team zugeordnet sind. Die Idee ist, dass in jedem Team die erste Person, die aufgerufen wird, die Rolle von Albert übernimmt, indem sie die Summe aller Nummern der Plätzchenboxen ihres Teams angibt. Dann können, wenn alle anderen Elfen im Team wie Benjamin agieren, 4 korrekte Antworten pro Team garantiert werden.

  Da es 20 disjunkte Teams gibt, stellt diese Strategie sicher, dass $20 \cdot 4 = 80$ korrekte Antworten garantiert werden.