



## 19 Eine verzahnte Angelegenheit

Autor: Lukas Protz (TU Berlin, MATH+)

### Aufgabe

Es ist dunkel und staubig. Was erwartet man auch anderes vom Dachboden des Weihnachtsmanns am Nordpol? Nur mit einer kleinen Taschenlampe ausgestattet, wollte der eifrige Elf Eifi den Dachboden der Werkstatt des Weihnachtsmanns aufräumen, damit mehr Platz für alle Geschenke geschaffen werden kann. Zu seiner Überraschung ist der Dachboden voller kleiner Schatzkisten, die durch einen merkwürdigen Mechanismus verschlossen sind. Eifi fragt sich, ob der Weihnachtsmann etwas vor den Elfen versteckt, und eifrig wie er ist, versucht er, die Kisten zu öffnen. Dabei entdeckt er, dass der Mechanismus wie folgt funktioniert:

- Auf dem Deckel jeder Kiste befinden sich drei Zahnräder. Die Anzahl der Zähne der Zahnräder kann gleich oder ungleich zur Anzahl der Zähne der anderen beiden Zahnräder sein.
- Ein Zahn jedes Zahnrads ist mit einem Kreis markiert.
- Wenn man direkt von oben auf die Zahnräder schaut, zeigt immer ein Zahn jedes Zahnrads genau nach oben.
- Außerdem befinden sich drei Taster auf der Kiste. Wird ein Taster gedrückt, drehen sich jeweils zwei der Zahnräder gleichzeitig. Die Drehung erfolgt immer im Uhrzeigersinn und bewegt beide Zahnräder jeweils um einen Zahn weiter. Taster können nicht gleichzeitig, sondern nur nacheinander gedrückt werden.
- Die Zahnräder sind den Tastern wie folgt zugeordnet:
  - Taster 1 dreht die Zahnräder 2 und 3
  - Taster 2 dreht die Zahnräder 1 und 3

- Taster 3 dreht die Zahnräder 1 und 2
- Die Kiste öffnet sich, wenn alle drei markierten Zähne jeweils nach oben zeigen.

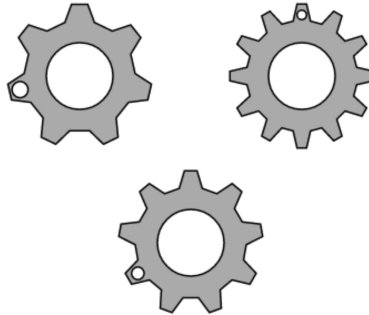


Abbildung 1: Beispiel einer Ausgangskonfiguration von drei Zahnrädern. Nur der markierte Zahn des oberen rechten Zahnrads zeigt nach oben.

Leider hat Eifi keine Strategie beim Versuch, die Kisten zu entriegeln, und schafft es nur, einige wenige Kisten zu öffnen. Doch das hält Eifi nicht davon ab, seine Mission fortzusetzen, um alle Geheimnisse zu entdecken, die der Weihnachtsmann möglicherweise in den Kisten verbirgt. Wenn es doch nur ein universelles Handbuch gäbe, wie man alle Kisten öffnen kann...

Kannst du Eifi helfen? Für welche Kombinationen von drei Zahnrädern mit einer Anzahl von Zähnen  $a, b$  und  $c$  ist es unabhängig von der Ausgangsposition der einzelnen Zahnräder möglich, die Kiste zu öffnen?

*Hinweis:* Die Frage sucht nach der größten Menge an Tripeln  $a, b$  und  $c$  oder äquivalent nach der kleinsten hinreichenden Einschränkung für  $a, b$  und  $c$ .

*(Antwortmöglichkeiten auf nächster Seite)*

**Antwortmöglichkeiten:**

1. Es ist niemals möglich.
2.  $a, b$  und  $c$  sind paarweise teilerfremd
3. Zwei der Zahlen  $a, b$  und  $c$  sind teilerfremd.
4.  $a, b$  und  $c$  sind nicht durch 2 teilbar.
5. Nicht alle Zahlen  $a, b$  und  $c$  sind durch 2 teilbar.
6.  $a, b$  und  $c$  sind alle durch 2 teilbar.
7.  $a, b$  und  $c$  sind nicht durch 3 teilbar.
8. Nicht alle Zahlen  $a, b$  und  $c$  sind durch 3 teilbar.
9.  $a, b$  und  $c$  sind alle durch 3 teilbar.
10. Keine der anderen Antwortmöglichkeiten trifft zu.