17 Das Olympische Unterbringungsdilemma

Autoren: Silas Rathke, Yamaan Attwa

Aufgabe

In diesem Jahr werden die Olympischen Arktischen Spiele am Nordpol stattfinden. 1.024 Athleten aus dem gesamten gefrorenen Norden werden in verschiedenen Sportarten antreten.

Otto, der Unterbringungsorganisator der Veranstaltung, ist dafür verantwortlich, die Athleten unterzubringen. Dabei muss er eine strikte Vorgabe des Arktischen Olympischen Komitees beachten: Wenn zwei (unterschiedliche) Athleten keine gemeinsame Sprache sprechen, dürfen sie nicht zusammen in einem Haus untergebracht werden. Um diese Regel einzuhalten, fragt Otto im Voraus alle Athleten, welche Sprachen sie sprechen können.

Otto macht einige interessante Feststellungen:

- Es gibt genau 10 Sprachen (L_1 bis L_{10}), die gesprochen werden.
- Jede mögliche Kombination dieser 10 Sprachen wird von genau einem Athleten gesprochen.
  Das heißt, dass es zum Beispiel genau einen Athleten gibt, der nur die Sprache L_1 spricht, genauso gibt es genau einen Athleten, der nur die Sprachen L_2, L_3 und L_8 spricht und so weiter.
- Es gibt also auch genau einen Athleten, der alle 10 Sprachen spricht und es gibt genau einen Athleten, der keine Sprache spricht.

Natürlich muss auch Otto so sparsam wie möglich arbeiten. Er möchte daher so wenig Häuser wie möglich bauen, muss dabei aber trotzdem die Regeln des Komitees einhalten. Wie viele Häuser muss Otto mindestens bauen, um alle 1024 Athleten unterzubringen? Sei k die gesuchte minimale Anzahl an

Häusern. Wie lautet die letzte Ziffer von k im Dezimalsystem?

Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 0

Projektbezug:

Dieses Rätsel ist ein Beispiel für ein Färbungsproblem, und obwohl diese besonders unterhaltsam sind, sind sie in der Regel schwierig. Üblicherweise haben wir eine bestimmte Menge V, deren Elemente wir färben möchten; jedoch darf der Teufel uns eine beliebige Liste von Bedingungen E geben, die Paare von Elementen spezifiziert, die nicht dieselbe Farbe erhalten dürfen. Unser Ziel ist es meistens, die minimale Anzahl von Farben zu bestimmen, die ausreicht, um die Elemente unserer Menge so zu färben, dass keine der Bedingungen des Teufels verletzt wird. Dieses Unterfangen gilt als berüchtigt schwierig; tatsächlich gibt es keinen bekannten schnellen Weg, um zu bestimmen, ob eine beliebige Menge V mit einer entsprechenden Liste E von Bedingungen mit nur 3 Farben korrekt gefärbt werden kann. Falls Sie einen schnellen Algorithmus dafür finden, sollten Sie sich einen Sekretär oder eine Sekretärin einstellen, da viele Menschen mit Ihnen sprechen möchten.

Dieses spezielle Problem hat einen ziemlich berühmten Verwandten: Angenommen, es gibt n Sprachen am Nordpol, wobei jeder Athlet genau k Sprachen spricht und jede Teilmenge von k Sprachen von genau einem Athleten gesprochen wird. Nun kann man erneut nach der minimalen Anzahl von Häusern fragen, die benötigt werden, um die Athleten unterzubringen, sodass keine zwei Athleten, die keine gemeinsame Sprache sprechen, dasselbe Haus teilen. Dieses Problem blieb 22 Jahre lang ungelöst, bevor es unter Verwendung scheinbar unabhängiger Theoreme aus der Topologie gelöst wurde!