8 Wilde Rentiere

Autorin: Margarita Kostré (ZIB)
Projekt: EF5-2

Aufgabe

Der Weihnachtsmann hat neue wilde Rentiere bekommen, die er gerne einsetzen möchte. Allerdings hat er keine Zeit, sie zu trainieren und kennt nur wenige Regeln über ihre Bewegung. Er weiß, dass die Position x_t der Rentiere zum Zeitpunkt t und die Geschwindigkeit v_t zum Zeitpunkt t bestimmten Regeln folgen. Um diese Regeln richtig zu beschreiben, führt er ein Koordinatensystem auf dem Boden (auf der Ebene) ein. Dann kann er die iterativen Gleichungen für die Geschwindigkeit v_t und die Position x_t aufschreiben:

$$v_{t+1} = -0.5v_t - ax_t$$

$$x_{t+1} = x_t + v_{t+1},$$

wobei der sogenannte Angstwert a eine positive reelle Zahl ist, die vom Rentier abhängt. Der Angstwert beschreibt, ob ein Rentier zutraulich ist und irgendwann nicht mehr vor dem Weihnachtsmann wegrennt. Ist der Angstwert a eines Rentiers günstig, dann wird das Rentier mit der Zeit beliebig langsam und bleibt auch langsam. Der Weihnachtsmann kann es dann einfangen und nach Hause bringen. Es gibt aber einige Rentiere, die ihre Angst nicht überwinden können. Diese Rentiere rennen immer weiter und schneller und können nicht eingefangen werden.

Gesucht sind alle Angstwerte a, die ein Rentier haben kann, damit der Weihnachtsmann es einfangen kann. Dabei soll davon ausgegangen werden, dass die Rentiere mit der Geschwindigkeit $v_0 = (0, 0)$ an der Position $x_0 = (1, 1)$ starten.

Hinweise und Bemerkungen:

Beachte, dass die Multiplikation einer Zahl λ und eines Punktes (x_1, x_2) durch $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$ definiert ist. Die Addition oder Subtraktion ist koordinatenweise definiert: $(x_1, x_2) \pm (y_1, y_2) = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2)$.

Zur Lösung dieser Aufgabe kann es hilfreich sein, den Betrag zu verwenden. Der Betrag stellt den Abstand einer Zahl zu 0 dar und ist definiert durch

$$|x| = \begin{cases} x & \text{, wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{, wenn } x < 0 \end{cases}.$$

Für den Absolutwert und zwei reelle Zahlen a, b gelten die folgenden Regeln:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|a - b| \geq ||a| - |b||$$

$$|ab| \leq |a||b|$$

Der Ausdruck „beliebig langsam werden und bleiben“ bedeutet in dieser Aufgabe Folgendes: Für jede positive Zahl $\epsilon > 0$ gibt es einen Zeitpunkt t_0, sodass, wenn $t \geq t_0$, dann für jede Komponente v der Geschwindigkeit v_t gilt $|v| < \epsilon$.

Antwortmöglichkeiten:

1. $0 < a < 0.1$
2. $0 < a < 0.2$
3. $0 < a < 0.3$
4. $0 < a < 0.4$
5. $0 < a < 0.5$
6. $0 < a < 0.6$
7. $0 < a < 0.7$
8. $0 < a < 0.8$
9. $0 < a < 0.9$
10. $0 < a < 1$

Projekt Referenz

Im EF5-2 Projekt „Datengetriebenes Modellieren des Romanisierungsprozesses in Nordafrika“, werden historische Daten verwendet, um Netzwerke zu ermitteln, die die Ausbreitung der Kultur darstellen. Aufgrund des geringen Datenumfangs bieten viele Netzwerke ähnliche Erklärungen für den Ausbreitungsprozess. Daher ist es wichtig, Algorithmen zu verwenden, die eine breite Palette möglicher Lösungen geben können. Ein solcher Algorithmus ist der Particle Swarm Optimization (PSO), der die Bewegung eines Vogelschwarmes simuliert, wobei die Positionen und Geschwindigkeiten der Teilchen durch eine Differenzengleichung gesteuert werden, wie sie hier gezeigt wird. Verschiedene Parameter können zu unterschiedlichen dynamischen Verhaltensweisen des Algorithmus führen und diese Variationen können je nach spezifischem Problem vorteilhaft sein.