# 20 Jahre Mathe-Kalender: Die schönsten Aufgaben und Lösungen

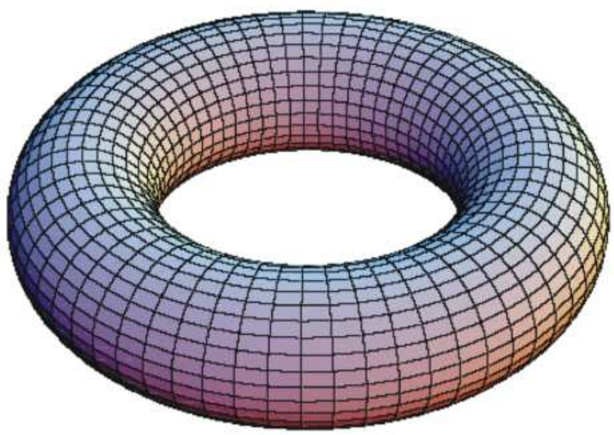
www.mathekalender.de

## Inhaltsverzeichnis

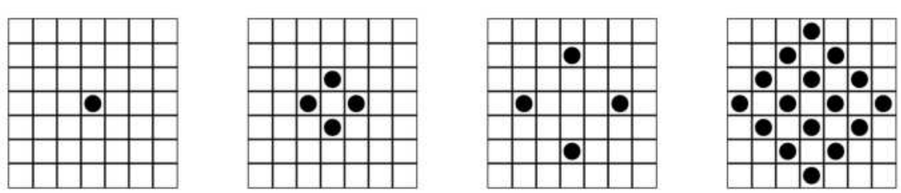
# 2004 Neues aus Zellularien

## Aufgabe

Der Planet „Zellularien“ ist anders als die Erde keine kugelförmige, sondern eine „kringelförmige“ Welt, die ähnlich einem Autoreifen aussieht (siehe Bild). Weil seine Bewohner praktisch orientiert sind, haben sie ihren Globus in lauter kleine Zellen eingeteilt, jeweils entlang der Kanten von 1024 Längen- und 1024 Breitengraden, so dass jeder der $1024 \cdot 1024 = 1048576$ Einwohner genau vier Nachbarn hat: einen nördlichen, einen südlichen, einen nach Osten und einen nach Westen. Wenn man etwa einen Atlas von Zellularien auf Karopapier zeichnet, so hätte ein Kästchen am linken Rand des Karopapiers die Zelle auf der gleichen Höhe am rechten Rand als westlichen Nachbarn.



Leider hat nun ein Zellularier bei einem Besuch von einem Nachbarplaneten einen extrem gefa hrlichen und gefra ßigen Kroll mitgebracht. Diese eigentlich possierlichen Tierchen vermehren sich rasend und fressen Massen, und sogar sich gegenseitig. Innerhalb eines Monats werden aus einem Kroll in einer Zelle genau vier, die dann in die vier Himmelsrichtungen auswandern und die Zelle leer hinterlassen. Stoßen sie dabei auf andere Krolle, so fressen sich je zwei Krolle gegenseitig auf, so dass entweder immer nur ein oder gar kein Kroll eine Zelle bewohnen kann — bis er sich wieder vermehrt und seine drei Nachkommen und er in die vier Himmelsrichtungen auswandern.
Die Kroll-Populationen nach den ersten vier Monaten sehen also so aus (leere Zellen nicht gekennzeichnet, solche mit einem Kroll mit einem Punkt):



Im zweiten Monat wandert etwa von den je vier Krollen je einer in das Zentrum. Da dann aber dort vier bleiben, fressen sich dort alle gegenseitig, und das Feld bleibt leer.

**Frage:** Werden die Zellularier jemals von der Krollplage befreit?

**Antwortmöglichkeiten:**

1. Ja, nach zehn Monaten
2. Ja, nach 511 Monaten
3. Ja, nach 512 Monaten
4. Ja, nach 1023 Monaten
5. Ja, nach 1024 Monaten
6. Ja, nach 2048 Monaten
7. Ja, nach 1048576 Monaten
8. Nein, niemals

**Tipp**: Probiere das Ganze erstmal auf einem kleinen Feld von $4 \cdot 4$, $8 \cdot 8$ oder $16 \cdot 16$ Kästchen. Sieh dir insbesondere die Krollverteilung nach 3, 7 und 15 Monaten an. Wichtig ist, dass die Länge und Breite Zellulariens eine Zweierpotenz ist ($2^{10} = 1024$) und dass die Kanten miteinander verbunden sind, das heißt, ein Kroll ganz außen links hat einen Nachfahren, der nach ganz rechts auswandert.

## Lösung

**Richtige Antwort: 3**

Am besten überlegt man sich Folgendes (mit Bleistift und Papier zum Nachspielen. Man braucht sich nur die ersten vier Generationen zu überlegen):

Nach drei Schritten bekommt man eine schachbrettartig gefu llte Raute von Krollen. Nach vier Schritten bekommt man dann vier isoliert stehende Krolle jeweils mit dem Abstand vier vom Zentrum (auf der Karte). Was passiert nach weiteren drei Schritten?
Da die Krolle sich jeweils maximal ein Feld pro Schritt ausbreiten ko nnen, ko nnen sich diese vier jeweils gar nicht beeinflussen und verhalten sich genauso wie der urspru ngliche Kroll — nach drei weiteren Schritten entstehen also vier Kopien der schachbrettartig gefu llten Raute. Da sie genau nebeneinander passen, entsteht somit eine große Raute der doppelten „Seitenlänge“ (Anzahl der Krolle am Rand, Ecken jeweils mitgezählt). Noch einen Schritt weiter, also im Zeitschritt acht, bleiben wieder nur die Krolle an den Eckpunkten übrig, vier Stück, jeweils mit Abstand acht zum Zentrum.
Ab jetzt sollte es klar sein, wie das Spiel weitergeht: Nach jeweils $2^k - 1$ Schritten entsteht eine Raute der „Seitenla nge“ $2^k$. Ein Schritt weiter entstehen vier Krolle jeweils mit Abstand $2^k$ zum Zentrum.
Jetzt wird es interessant: Da die Kroll–Welt genau $1024 = 2^{10}$ Kästchen „groß“ und wie ein Kringel gekru mmt ist, entsteht nach $2^{10-1} - 1 = 511$ Schritten eine wirklich riesige Raute der „Seitenlänge“ $2^9$, die bis auf einen kleinen Rand von einem Kästchen genau

den Planeten überdeckt. Davon überleben einen Schritt später nur die vier Krolle an den Eckpunkten (jeweils im Abstand $2^9$ zum Zentrum), aber die entstehen genau übereinander im verbleibenden Rand ($2 \cdot 2^9 = 2^{10} = 1024$), da der Planet ja „kringelförmig" geschlossen ist. Also fressen sich die vier auf, und die Krolle sind weg nach $2^9 = 512$ Schritten!

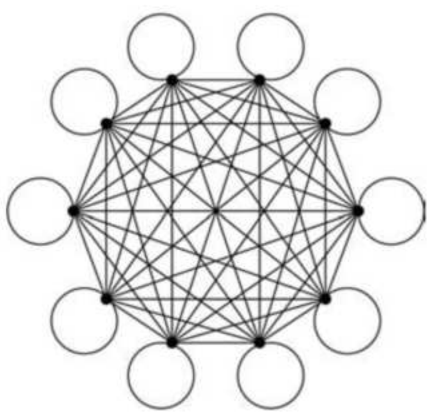
# 2005 Dominoschlangen

Autoren: Frank Lutz, Brigitte Lutz-Westphal Projekt: G5*, G6

## Aufgabe

Immer noch so lange bis Weihnachten! Sebastian vertreibt sich die Zeit, indem er Dominoschlangen legt. Dabei werden die Dominosteine so hintereinander in eine Reihe gelegt, dass benachbarte Steine mit derselben Zahl aneinanderstoßen:

Beim ersten Versuch bleiben einige Steine übrig. Er fragt sich, ob man diese Steine nicht auch noch hätte anlegen können, wenn man geschickter angefangen hätte.
Er spielt mit einem 9er-Dominospiel, das fur alle möglichen Paare der Zahlen 0 bis 9 genau einen Stein enthält.
Wie viele Steine bleiben beim Bau solch einer Dominoschlange mit 9er-Dominosteinen mindestens ubrig?
Tipp: Am Fenster von Sebastians Zimmer hängt ein Weihnachtsstern. Er weist den Weg zur Lösung! Zwischen dem Stern und den Dominosteinen gibt es eine geheimnisvolle Beziehung. Außerdem hat Sebastian gerade ein „Haus vom Nikolaus“ gezeichnet.



**Antwortmöglichkeiten:**

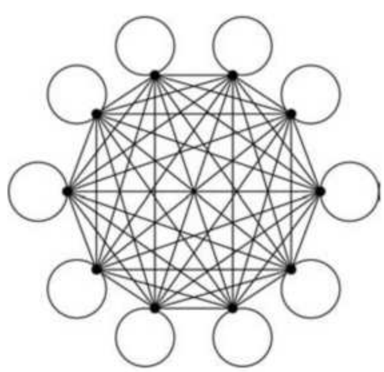
1. Keiner, es können alle Steine in eine Schlange gelegt werden, wenn man es geschickt anstellt.

2. Es bleibt immer mindestens ein Stein übrig.
3. Es bleiben immer mindestens zwei Steine übrig.
4. Es bleiben immer mindestens drei Steine übrig.
5. Es bleiben immer mindestens vier Steine übrig.
6. Es bleiben immer mindestens funf Steine übrig.
7. Es bleiben immer mindestens sechs Steine übrig.
8. Es bleiben immer mindestens sieben Steine übrig.
9. Es bleiben immer mindestens acht Steine übrig.
10. Es bleiben immer mindestens neun Steine übrig.

Diese Aufgabe stammt aus der diskreten Mathematik und hat mit der Planung von optimalen Wegen zu tun. Themen der diskreten Mathematik eignen sich sehr gut für den Mathematikunterricht. In zwei MATHEON-Projekten
(Projekt G5*, http://www.math.tuberlin.de/westphal/projekt/ und Projekt G6, http://www.math.tu-berlin.de/didaktik/tikiindex.php?page=Matheon+G6) wird an Konzepten und Materialien fur den Unterricht über kombinatorische Optimierung gearbeitet.

## Lösung

**Richtige Antwort: 5**
Das 9er-Dominospiel hat 55 Steine, wie man sich durch Abz¨ahlen klarmachen kann oder mit Hilfe der Formel $\frac{(n+1)\cdot n}{2}$ ($n$ ist die Anzahl der verschiedenen Ziffern, in diesem Fall also 10) ausrechnen kann. Der Weihnachtsstern (der ein Graph ist) hat 55 Kanten, so dass für jeden Stein eine Kante vorhanden ist. Die Knoten stehen fur jeweils eine der Zahlen von 0 bis 9. Verbindet beispielsweise eine Kante die Knoten 1 und 5, so ist der Dominostein mit dem Zahlenpaar $\{1, 5\}$ gemeint.



Eine Schlange zu legen bedeutet also, in dem Graphen einen Kantenzug ohne Kantenwiederholungen (weil es ja jeden Stein nur einmal gibt) zu suchen. Beim Haus vom Nikolaus wird auch nach solch einem Kantenzug gesucht. Dort kann man alle Kanten in einem Zug zeichnen. Alle Dominosteine in eine Schlange zu legen hieße, alle Kanten des Graphen in einem einzigen Kantenzug ablaufen zu können. Das kann beim 9er-Domino nicht gehen, weil der zugehörige Graph nur Knoten „ungeraden Grade“ (d.h. mit ungerader Anzahl von Kantenenden) hat. Knoten mit ungeradem Grad haben die Eigenschaft, dass man beim Ablaufen der Kanten irgendwann dort stecken bleibt und keine Kante mehr zur Verfügung hat, die von dem Knoten wieder wegfuhren würde.

Beim Haus vom Nikolaus gibt es nur zwei Knoten ungeraden Grades, so dass man dort beginnen bzw. enden kann. In dem Dominographen kann man sich auch zwei Knoten mit ungeradem Grad auswählen, die Beginn bzw. Ende der Schlange sein sollen. Es bleiben dann aber immer noch 8 Knoten ungeraden Grades übrig. Nimmt man nun von jedem dieser Knoten ein Kantenende weg (das sind insgesamt 4 Kanten, die zwischen je zwei dieser ungeraden Knoten verlaufen), so ist der Graph „repariert“, und es kann ein Kantenzug ohne Kantenwiederholungen durch alle Kanten gefunden werden, der in dem einen übriggebliebenen Knoten mit ungeradem Grad beginnt und in dem anderen endet. Die 4 weggenommenen Kanten entsprechen 4 Dominosteinen. Man kann natürlich auch mehr Kanten herausnehmen, um fur alle bis auf zwei Knoten gerade Knotengrade zu bekommen, so dass immer mindestens 4 Steine übrigbleiben.

Der gesuchte Kantenzug ist eine sogenannte „Euler-Tour“. Euler-Touren spielen bei der Planung von Touren fur die Müllabfuhr oder die Briefzustellung, aber auch in der technischen Fertigung eine Rolle.

# 2006 Die Elfenstadt

Autoren: Gregor Wünsch, Janina Brenner, Christian Liebchen Projekte: B 15, B 16

## Aufgabe

Die wichtigsten Helfer des Weihnachtsmanns, die Elfen, haben ein Problem! Ihr Land wurde überschwemmt. Trotzdem lassen die 64 Elfenfamilien den Kopf nicht hängen. Da Elfen ihre Häuser traditionell auf Pfeilern über dem Boden bauen, ist zum Glück alles trocken geblieben. Sie bauen flink für jede Familie ein Boot und möchten außerdem Stege bauen, so dass jedes Haus von jedem anderen Haus entlang eines Weges aus Stegen erreichbar ist. Soweit so gut!
Da ihr Land nach der Überschwemmung jedoch mitten im Meer liegt, denken sich die schlauen Elfen Folgendes: *„Wir müssten die Stege so bauen, dass man vom Meer aus jede Stelle unseres Landes mit dem Boot erreichen kann.“* Das heißt, es sollte kein Gebiet durch einen Kreis von Stegen eingeschlossen werden. Und so fangen die Elfen an zu bauen. Schon nach wenigen Tagen ist die Verbindung aller Häuser mit Stegen vollbracht. Die Lösung der Elfen ist in der Abbildung 1 skizziert.

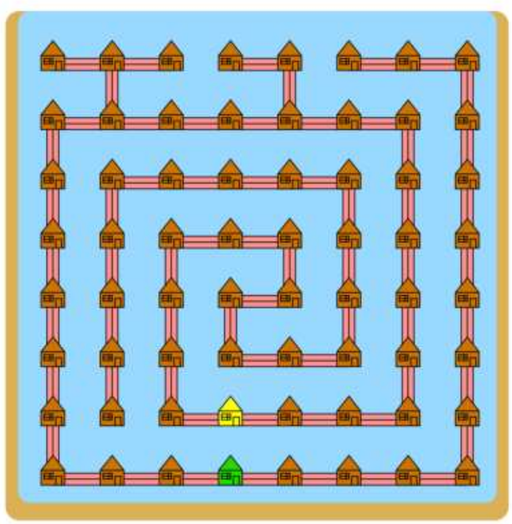


Abbildung 1: Das Elfenreich mit 64 Familien

Doch gerade als sie fertig sind, merken die Elfen, dass sie etwas Wichtiges nicht bedacht haben: Für die Elfenkinder, die noch nicht alleine mit den Booten fahren dürfen, sind die Stege die einzige Möglichkeit, um die Häuser ihrer Freunde zu erreichen. Mit der jetzigen Konstruktion sind viele dieser Wege sehr, sehr lang!
Die meisten Elfenkinder haben sich vor der Überschwemmung mit den Nachbarkindern angefreundet. Und jetzt führt zum Beispiel der Weg von Elfriede aus dem grünen Haus zu Elvira im gelben Haus, die vorher direkt benachbart waren, über 23 Stege. Das gefällt den Elfen nicht! Sie beschließen, die Stege noch einmal neu zu platzieren, diesmal jedoch besser: Für Elfenfamilien, die horizontal oder vertikal direkt nebeneinander wohnen, soll die durchschnittliche Entfernung zwischen ihren Häusern, gemessen in der Anzahl der Stege, möglichst

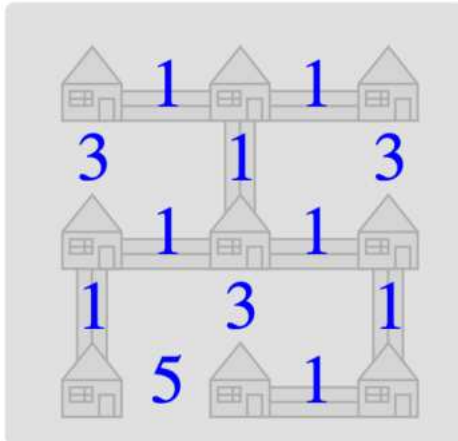



Abbildung 2: Ein kleines Beispiel.

klein werden. Zwei Häuser, die durch einen Steg verbunden sind, haben zum Beispiel Entfernung 1. Die Entfernungen zwischen den Häusern aller anderen Familien, also zwischen solchen, die „Diagonalnachbarn" oder gar keine Nachbarn sind, sollen nicht berücksichtigt werden.
In einer kleineren Elfenstadt sähe die Stegkonstruktion vielleicht so aus wie in Abbildung 2. Die relevanten Entfernungswerte ergeben eine Summe von 22.
*Tipp*: Die angegebene Konstruktion ist nicht optimal!
Kannst du den Elfen helfen, die beste Möglichkeit für die Konstruktion der Stege zu finden? Achtung: Stege können nur horizontal oder vertikal zwischen benachbarten Häusern gebaut werden; diagonal benachbarte Häuser können nicht direkt verbunden werden. Man kann sich leicht uberlegen, dass es gleichbedeutend ist, die durchschnittliche Entfernung oder die Summe der Entfernungen zu minimieren. Welches ist die kleinste der unten stehenden Summen von Entfernungen, die die Elfen erreichen können?

**Antwortmöglichkeiten:**

1. 273
2. 294
3. 280
4. Die erste Lösung der Elfen war schon optimal.
5. 251
6. 210
7. 336

8. 230
9. 276
10. 217

*Tipp*: Hilft es, die Entfernungen der Häuser zum offenen Meer per Boot zu minimieren?

## Projektbezug:

Zum einen handelt es sich bei der Suche nach den beschriebenen Strukturen um ein spannendes Forschungsthema (aufspannende B¨aume in Gittergraphen, die eine minimale strikt fundamentale Kreisbasis induzieren). So ist aktuell nicht einmal bekannt, ob überhaupt erwartet werden darf, dass es ein effizientes Verfahren geben kann, mit dem für ein Gitter beliebiger (aber fester) Größe der beste solche Baum konstruiert werden kann. Zum anderen haben sich derartige Kreisbasen in der Vergangenheit als sehr hilfreich bei der Berechnung von Taktfahrplänen mit minimaler netzweiter Umsteigewartezeit erwiesen, vgl. Matheon-Projekt B15: Je kürzer die Summe aller „Pfade auf Stegen“, desto weniger Möglichkeiten sind bei der Suche nach dem besten Fahrplan zu betrachten.
Nun mögt ihr einwenden, dass Verkehrsnetze im Allgemeinen deutlich anders aussehen als im Elfenland. Dann werft aber am besten einfach ’mal einen Blick auf http://www.mta.nyc.ny.us/nyct/maps/subwaymap.pdf, wo ihr zumindest für Teilbereiche ganz ähnliche Strukturen entdecken werdet.

## Lösung

**Richtige Antwort: 9**
Beherzigt man den in der Aufgabenstellung gegebenen Tipp und versucht zunächst, ein Netzwerk von Stegen zu bauen, das möglichst kurze Wege vom Inneren der Stadt zum offenen Meer auf dem Bootsweg ermöglicht, so kommt man auf die Lösung in Abbildung 3. Diese hat einen Wert von 280. Wir können also jetzt schon die beiden schlechteren Antworten 2 (294) und 7 (336) ausschließen. Genauso ist Antwort 4 natürlich schlechter, hier ergibt sich eine Gesamtsumme von 1028!
Hätten wir es mit einer kleineren Elfenstadt zu tun, etwa mit $6 \times 6 = 36$ Familien, wäre eine entsprechende Lösung auch schon optimal gewesen. Hier aber kann man durch einiges Knobeln noch eine bessere Lösung finden. Zwei Mglichkeiten haben wir in Abbildungen 4 und 5 gegeben; beide ergeben eine Gesamtsumme der Distanzen von 276. Auf diese Lösungen kann man nur durch geschicktes Ausprobieren oder Knobeln kommen. Es ist schon erstaunlich, dass es Möglichkeiten gibt, das in Abbildung 3 gefundene Ergebnis um 4 Längeneinheiten zu verbessern!

Wie zeigt man nun, dass Antwort 9 mit dem Wert von 276 die beste Antwort ist und es nicht vielleicht noch eine bessere Stegkonstruktion gibt?

Zunächst kann man sich davon überzeugen, dass die Summe der Weglän-gen immer eine gerade Zahl ergeben muss. Dafür macht man sich als erstes folgendes klar: Es gibt genau 112 $(= 2 \cdot 7 \cdot 8)$ Paare von benachbarten Häusern, wovon die eine Hälfte horizontale Nachbarn

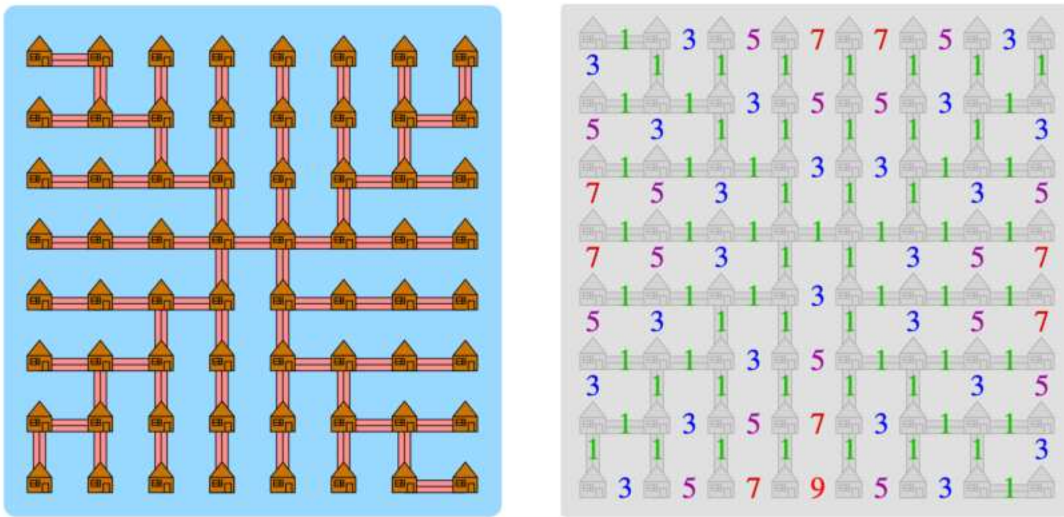


Abbildung 3: Eine Lösung mit kürzesten Wasserwegen zum offenen Meer.
Wert: $63 \cdot 1 + 24 \cdot 3 + 16 \cdot 5 + 8 \cdot 7 + 1 \cdot 9 = 280$.

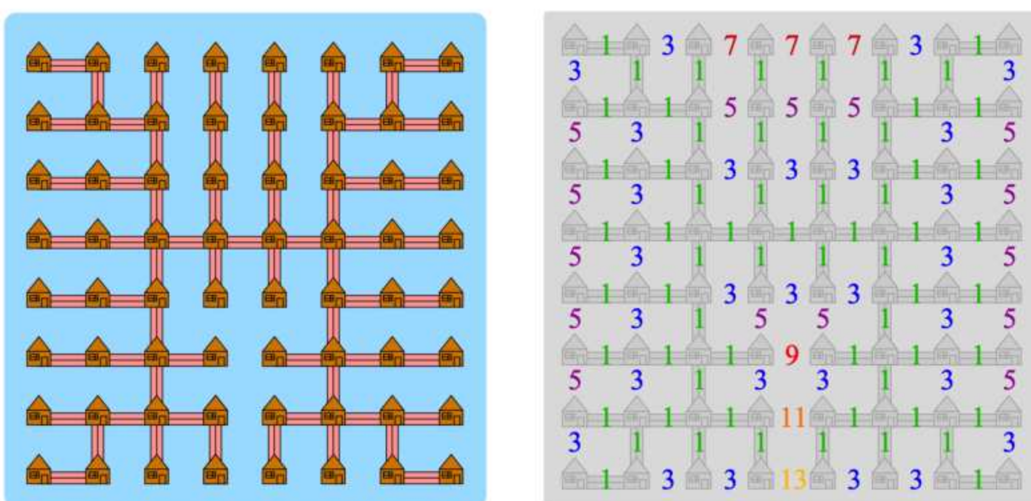


Abbildung 4: Eine Stegkonstruktion mit Wert $63{\cdot}1+28{\cdot}3+15{\cdot}5+3{\cdot}7+1{\cdot}9+1{\cdot}11+1{\cdot}13 = 276$.

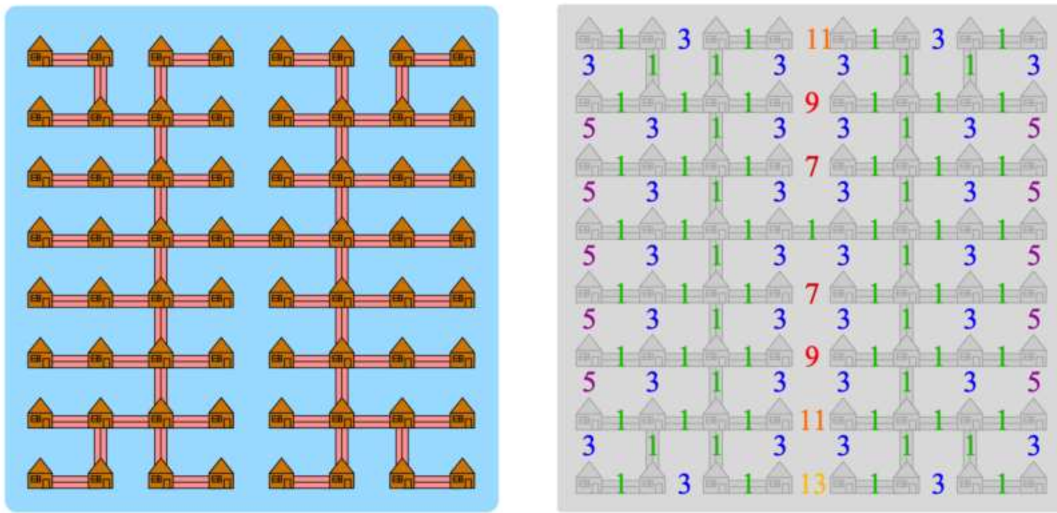


Abbildung 5: Eine alternative Stegkonstruktion mit Wert $63 \cdot 1 + 32 \cdot 3 + 10 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 11 + 1 \cdot 13 = 276$.

und die andere Hälfte vertikale Nachbarn sind. Das bedeutet, dass sich die Gesamtlänge einer beliebigen Stegkonstruktion aus 112 Summanden zusammensetzt. Desweiteren beobachtet man, dass jeder Weg zwischen benachbarten Häusern entlang der Stege eine ungerade Länge hat. Um dies zu sehen, stellen wir uns einmal vor, wir liefen von einem beliebigen Elfenhaus $H_1$ zu seinem Nachbarhaus $H_2$ direkt rechts daneben. Da die beiden Häuser vertikal auf einer Höhe liegen, muss die Anzahl der Stege, die wir nach oben durchlaufen, gleich der Anzahl der Stege sein, die wir nach unten durchlaufen. Das heisst, die Anzahl der vertikalen Stege (nach oben oder nach unten durchlaufen) auf dem Weg zwischen $H_1$ und $H_2$ ist immer gerade. Andererseits muss es, weil $H_2$ rechts neben $H_1$ liegt, genau einen nach rechts durchlaufenen Steg mehr geben als nach links durchlaufene. Das bedeutet, dass die Anzahl der horizontalen Stege entlang des Weges zwischen den beiden Häusern ungerade ist. Somit ist die Gesamtanzahl der Stege auf dem Weg ungerade ( „$gerade + ungerade = ungerade$“). Bei einer anderen Lage der Nachbarhäuser (z.B. „übereinander") ist eine sehr ähnliche Argumentation zu führen, bei der lediglich die Richtungen der Stege angepasst werden müssen. Insgesamt hat die Gesamtlänge einer beliebigen Stegkonstruktion also eine gerade Anzahl von Summanden, die jeweils ungerade sind. Also muss die Gesamtlänge gerade sein („$gerade \cdot ungerade = gerade$"). Diese Überlegungen ermöglichen es, die Antworten 1, 5 und 10 auszuschließen, da alle drei ungerade Werte sind.

Es bleiben also noch Antworten 6 (210), 8 (230) und 9 (276, was unserer gefundenen Lösung entspricht). Um die beiden kleineren Lösungen auszuschließen, bestimmen wir Mathematiker sogenannte „untere Schranken“. Das heißt, wir stellen Überlegungen an, mithilfe derer wir zeigen können, dass eine Lösung nie besser als ein bestimmter Wert werden kann. Im Folgenden beschreiben wir, wie man sich überlegen kann, dass 232 eine untere Schranke ist. Zuerst sollte man sich noch einmal vor Augen führen, was man überhaupt erreichen möchte.

In diesem Fall wollen wir eine Stegkonstruktion so bauen, so dass zwar jede Wasserzelle noch vom offenen Meer aus erreichbar ist, aber die Gesamtsumme der Entfernungen zwischen vorher benachbarten Häusern möglichst klein ist. Dafür ist es natürlich gut, wenn jede einzelne Entfernung klein ist. Man findet jedoch schnell heraus, dass nicht alle ehemaligen Nachbarhäuser Abstand eins haben, also direkt verbunden sein können. Sonst könnte man mit dem Boot gar nicht mehr in die Stadt fahren, und es gäbe viele kleine abgeschnittene Wasserzellen.
Egal wie man die Stege verteilt, man kann immer höchstens 63 Stege bauen, ohne einen Kreis aus Stegen zu konstruieren, der ein Stück Wasser von der Außenwelt abschneiden würde. Das kann man sich so überlegen: Um zwei Häuser zu verbinden, braucht man genau einen Steg. Mit jedem weiteren Steg kann man genau ein neues Haus an die bereits verbundenen Häuser anschlieBen. Zwei neue Häuser kann man nicht auf einmal anschließen, da ein Steg immer nur zwischen zwei Häusern verläuft, wovon eines schon angeschlossen ist. Und würde man gar kein neues Haus anschliessen, aber von einem angeschlossenen Haus ausgehen, dann würde man ein bereits verbundenes zum zweiten Mal anschließen und damit einen Kreis erzeugen! Also können wir ausrechnen, wie viele Stege man genau verbauen kann: Einen Steg für jedes Haus außer das erste, also $64 - 1 = 63$ Stege. Damit ist schon mal klar, dass genau 63 vorher benachbarte Familien auch hinterher direkte Nachbarn sein werden.
Hieraus können wir schon eine erste untere Schranke berechnen. Wenn nämlich nur 63 Wege die Länge eins haben können, und alle Wege ungerade Länge haben, ergibt sich, dass die restlichen $112 - 63 = 49$ Weglängen jeweils mindestens 3 betragen müssen. Also ergibt sich als Gesamtsumme mindestens

$$63 \cdot 1 + 49 \cdot 3 = 210$$

Allerdings können auch nicht alle 49 restlichen Abstände nur 3 Stege lang sein. Um einen Abstand von 3 zu bilden, müssen drei Stege um eines der „Einheitskästchen“ herumführen, so wie zum Beispiel in Abbildung 6. Da jeder Steg höchstens zu zwei Einheitskästchen gehört, kann er auf höchstens zwei „Dreier-Pfaden“ liegen. Außerdem besteht jeder Dreier-Pfad aus drei Stegen. Mit 63 Stegen kann man also höchstens $(63 * 2)/3 = 42$ Dreier-Abstände konstruieren. Dann müsste aber auch jeder Steg an zwei dieser Kästchen beteiligt sein. Da man irgendwann an den Rand stößt und dort sicher mindestens eine Kante nur für einen Dreier-Pfad benutzen kann, können wir getrost davon ausgehen, dass es höchstens 41 Dreier-Abstände gibt.

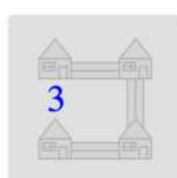



Abbildung 6: Ein Abstand von drei Stegen umschließt immer ein „Kästchen“.

Das wiederum heißt, dass es mindestens $112 - 63 - 41 = 8$ Abstände gibt, die länger als 3, also mindestens 5 sind. Wir erhalten eine neue untere Schranke von

$$63 \cdot 1 + 41 \cdot 3 + 8 \cdot 5 = 226.$$

Gleichzeitig wissen wir, dass es auch von dem Wasserfeld ganz in der Mitte einen Bootsweg zum offenen Meer geben muss. An der Stelle, wo dieser Bootsweg die Stadt verlässt, muss er zwischen zwei ehemals benachbarten Familien hindurch, die jetzt um das mittlere Wasserfeld herumlaufen müssen, um sich gegenseitig zu besuchen. Dieser Weg ist mindestens 9 Stege lang! Genauso ist der Abstand zwischen dem vorletzten Häuserpaar, das der Bootsweg durchtrennt, mindestens 7. Würde die Verbindung des mittleren Wasserfeldes zum Meer anders aussehen, wären die Entfernungen sogar noch größer. Wir haben also mindestens einen Abstand der Länge mindestens 7, und mindestens einen der Länge mindestens 9. Zusammen haben wir jetzt die benötigte untere Schranke:

$$63 \cdot 1 + 41 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 9 = 232.$$

Damit können wir auch Antworten 6 und 8 ausschließen, deren Werte von 210 bzw. 230 nie erreicht werden können, wie wir uns hier überlegt haben. Also ist Antwort 9 die bestmögliche angegebene Lösung.

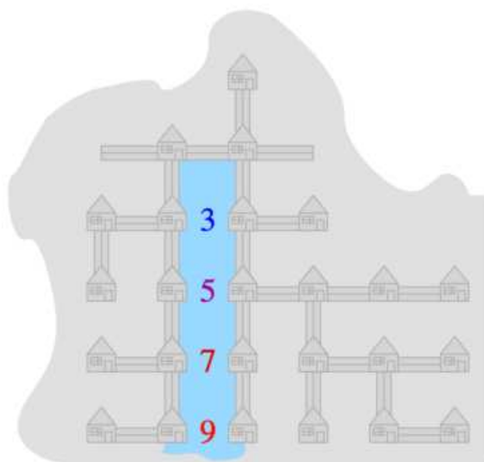



Abbildung 7: Der Ausweg vom mittleren Wasserfeld erzwingt weite Wege.

**Bemerkung**: Diese Aufgabe ist unter allen Mathekalender-Aufgaben besonders nah an der aktuellen Forschungsarbeit von Matheon-Mitarbeitern. Wie ihr schon in der Aufgabenstellung gelesen habt, ist das Finden von „möglichst kurzen Stegkonstruktionen“, oder in der Fachsprache Kreisbasen, wichtig für die Erstellung von guten U-Bahnfahrplänen. Deshalb untersuchen Forscher an der Technischen Universität Berlin diese Frage zur Zeit intensiv. Dabei sind sie auf die erstaunliche Tatsache gestoßen, dass auf rechtwinkligen Gittern (wie die Elfenstadt) kleinste Kreisbasen eine einfache Struktur haben, solange das Gitter bis zu $6 \times 6$ Knotenpunkte hat, auf größeren Gittern jedoch auf einmal ganz andere Konstruktionen besser sind. Auf größeren Gittern können wir noch nicht beweisen, welches die (bezüglich Weglängensumme) kleinstmöglichen Stegkonstruktionen sind! Wie ihr seht, sind in der Mathematik noch viele Fragen und Probleme offen. Manche lassen sich sehr einfach beschreiben, und doch ist es sehr schwer, eine Lösung zu finden! Vielleicht könnt ihr uns ja helfen. Viel Erfolg!

# 2007 Die Gewichtel

Autor: Falk Ebert
Projekt: D13

## Aufgabe

Der Verlademeister Valentin hat ein Problem: Seine Gewichte sind weg. Und das so kurz vor Weihnachten. Er hat doch dafür zu sorgen, dass der Schlitten des Weihnachtsmanns den Nachtflugregulationen entspricht und die besagen nun einmal, dass ein Schlitten über bewohntem Gebiet maximal 220kg wiegen darf. Der Weihnachtsmann allein bringt schon exakte 100kg auf die Waage, aber die Geschenke variieren ja jedes Jahr wieder. Demnach muss Valentin jedes Geschenk einzeln abwiegen. Standardmäßig haben die Geschenke immer nur volle Kilogrammgewichte (der Rest wird immer mit Verpackungsmaterial und Süßigkeiten aufgefüllt). Zum Wiegen verwendet Valentin eine uralte Balkenwaage, bei der auf die eine Seite Gewichte und auf die andere Seite das zu wiegende Geschenk gestellt werden. Da ihm die Gewichte aber fehlen, will Valentin sich vom Geschenkeaufseher Gernot ein paar seiner Geschenkebauwichtel als Gewichtel ausleihen. Diese haben glücklicherweise auch immer nur volle Kilogrammgewichte (der Rest wird immer mit Süßigkeiten aufgefüllt). Die Wichtel haben dabei alle möglichen Gewichte von 1 kg (MikroelektronikWichtel) bis 120 kg (Motorroller-Wichtel). Gernot will natürlich keine 120 Wichtel abkommandieren, sondern so wenige wie möglich. Valentin kann ja mehrere Wichtel gemeinsam auf die Gewichte-Seite der Waage stellen, um so verschiedene Gegengewichte zu erhalten. Dann kommt ihm eine grandiose Idee: Er kann ja seine Gewichtel auf beide Seiten der Waage stellen, d.h. auch auf die Seite mit dem Geschenk.

Wie viele Gewichtel benötigt Valentin, wenn er eine bzw. beide Seiten der Waage mit Gewichteln besetzen kann, um damit das Gewicht jeden Geschenkes ( 1 - 120kg) exakt abwiegen zu können?

**Antwortmöglichkeiten:**

1. 6 Gewichtel bzw. 6 Gewichtel
2. 5 Gewichtel bzw. 7 Gewichtel
3. 8 Gewichtel bzw. 7 Gewichtel
4. 9 Gewichtel bzw. 4 Gewichtel
5. 7 Gewichtel bzw. 4 Gewichtel
6. 7 Gewichtel bzw. 6 Gewichtel
7. 7 Gewichtel bzw. 7 Gewichtel
8. 6 Gewichtel bzw. 5 Gewichtel
9. 6 Gewichtel bzw. 4 Gewichtel

10. 7 Gewichtel bzw. 5 Gewichtel

Bemerkung: Spitzfindigkeiten der Art, dass man Gewichtel in unterschiedlichem Abstand vom Drehpunkt platzieren könne, werden von der Waage nicht berücksichtigt!

## Projektbezug:

Der Autor beschäftigt sich innerhalb des Projekts D13 vor allem mit der Frage, wie man Gleichungen, die komplizierte Schaltkreise beschreiben, effizient auf dem Computer lösen kann. Daneben hält er mathematische Vorträge vor Schülern und macht sich zur Zeit Gedanken, was er seiner Familie zu Weihnachten schenken kann - also ist nur ein indirekter Projektbezug erkennbar.

## Lösung

**Richtige Antwort: 10**

Betrachten wir zuerst den Fall, dass nur eine Seite der Waage mit Gewichteln besetzt werden kann. Jeder Gewichtel hat den Zustand 'auf der Waage' oder 'unten'. Wir ordnen dem Zustand 'auf' den Wert $\alpha = 1$ zu und dem Zustand 'unten' den Wert $\alpha = 0$. Sind jetzt die Gewichtel durchnummeriert und hat der $i$-te Wichtel Gewicht $g_i$, dann ergibt sich für ihr Gesamtgewicht

$$G = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 + \dots$$

Wenn die Gewichte $g_i$ bekannt sind, dann reicht es aus, die Folge $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots$ zu kennen, um das Gesamtgewicht zu berechnen. Dies bedeutet aber, dass wir alle Zahlen zwischen 1 und 120 durch eine Folge von Nullen und Einsen darstellen müssen. Dieser Sachverhalt ist auch als Binärsystem [1] bekannt, bei dem die Gewichte $g_i = 2^{i-1}$ sind. Mit den Gewichteln von $1$ kg, $2$ kg, $4$ kg, $8$ kg, $16$ kg, $32$ kg und $64$ kg lassen sich so sämtliche Gewichte zwischen 1 kg und 127 kg ausdrücken.

Ähnlich gehen wir vor, wenn Gewichtel auf beiden Seiten der Waage stehen können: Diesmal lassen wir die Zustände

- 'rechts (Gewichtel stehen auf der Seite des Geschenks $\equiv -1$ );
- 'links' (Gewichtel stehen nicht auf der Seite des Geschenks $\equiv 1$ );
- 'unten' (Gewichtel stehen nicht auf der Waage $\equiv 0$ )
  zu.

[1] Im Dezimalsystem wird jede Zahl dargestellt als eine Summe von Potenzen der Zahl 10. Bsp. (die Zahl im Index benennt die Basis):

$$127_{10} = 7 * 10^0 + 2 * 10^1 + 1 * 10^2$$

analog gilt für das Binärsystem:

$$127_{10} = 1 * 2^0 + 1 * 2^1 + 1 * 2^2 + 1 * 2^3 + 1 * 2^4 + 1 * 2^5 = 111111_2$$
$$126_{10} = 0 * 2^0 + 1 * 2^1 + 1 * 2^2 + 1 * 2^3 + 1 * 2^4 + 1 * 2^5 = 111110_2$$

Dass man hier 3 Zustände zur Verfügung hat, legt nahe, dass man hier nicht das Binär-, sondern das Ternärsystem zuhilfe nimmt, d.h. die Zahldarstellung zur Basis 3 .
Mit den Potenzen $3^0; 3^1; 3^2; 3^3; 3^4$ lassen sich im Ternärsystem alle Zahlen zwischen $1_{10}$ und $242_{10}$ darstellen.[2]

Andererseits stellt jede gegebene Folge $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ mit $\alpha_i \in \{-1; 0; 1\}$ die Verteilung der Gewichtel auf der Waage dar. Addiert man zu jedem Folgenglied 1 dazu, so kann man die entstehende Zahlenfolge als ternäre Zahl auffassen.

Bsp.:
60 kg sollen ausgewogen werden. Bekannt sei die Verteilung der Gewichtel 81 kg, 27 kg, 9 kg, 3 kg, 1 kg :
1 -1 1 -1 0 (Verteilung der Gewichtel in von links absteigender Folge)

Dies wird durch Addition von 1 zur Ternärzahl:
2002011 $\left(1 * 3^0 + 0 * 3^1 + 2 * 3^2 + 0 * 3^3 + 2 * 3^4 = 181_{10}\right)$ anders: $20201_3 = 181_{10}$
Will man aus dieser Gleichung/ Zahldarstellung auf die Verteilung der Gewichtel schließen, gibt es 2 Wege:
a) im Ternärsystem:
Ziehe von jeder Stelle der Folge 1 ab .
b) interessanter ist der Fall im Dezimalsystem (in dem ja auch die Gewichte der Geschenke angegeben sind):
Hier tritt an die Stelle der Reduzierung des Stellenwerts um 1 (wie im Ternärsystem) die Subtraktion einer Potenz von 3:
Also ist zu rechnen: $181 - 81 - 27 - 9 - 3 - 1 (= 60)$.

D.h. aber auch, dass man bei gegebenem Gewicht in Dezimaldarstellung nur die Potenzen von 3 addieren muss, um aus der entstehenden Dezimalzahl die Ternärdarstellung und damit die Verteilung der Gewichte zu ermitteln.
Bsp.:
Sei 75 kg das Gewicht des Geschenkes. Gesucht ist die Verteilung der Gewichtel. Aus obigen Überlegungen folgt:
$75 + 1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 196_{10}$
Die Darstellung von 196 im Ternärsystem lautet:
$196_{10} = 2 * 81 + 1 * 27 + 0 * 9 + 2 * 3 + 1 * 1 = 21021_3$

In dieser Darstellung wird jedes Folgenglied um 1 reduziert, um auf die Verteilung der Wichtel schließen zu können:
Es resultiert die Folge $1; 0; -1; 1; 0$. Dies bedeutet:
Auf der Seite des Geschenks steht der Gewichtel 9 kg.
Keine Verwendung finden die Gewichtel 1 kg und 27 kg.
Auf der anderen Waagschale stehen die Gewichtel 81 kg und 3 kg.

Es wurde somit exemplarisch gezeigt, dass die 5 Gewichtel 1 kg, 3 kg, 9 kg, 27 kg und 81

[2] Dafür müssen die Gewichte allerdings doppelt vorhanden sein, was hier nicht der Fall sein soll (z.B. $242_{10} = 2 * 81 + 2 * 27 + 2 * 9 + 2 * 3 + 0 * 1 = 22220_3$ - jedoch dürfen die Gewichte ja auf beide Seiten der Waage gestellt werden und zudem hat man noch das Gewicht der Geschenke).

kg genügen, um jedes Geschenk auswiegen zu können.

Um zu begründen, dass 7 bzw. 5 Gewichtel auch das Minimum sind, greifen wir auf das Prinzip der Codierung zurück. Wir wissen bereits, dass man die zu messenden Geschenkgewichte durch eine geordnete Folge von Gewichteln codieren kann. Das liefert im ersten Fall die Binärdarstellung und im zweiten die zur Ternärdarstellung äquivalente Form. In jedem Fall hat die Folge das Aussehen $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$. Dabei kann jedes $a_i$ einen von $k$ Zuständen annehmen. Eine solche Folge von $n$ Gliedern kann damit genau $k^n$ Zustände codieren. Wir wollen sämtliche Geschenke im ganzzahligen Bereich von 1 kg bis 120 kg auswiegen können. Diese Folge muss also mindestens 120 Zustände annehmen können. Im ersten Fall ist $k = 2$ und $2^7 = 128$ liefert genügend solche Zustände, wohingegen $2^6 = 64$ nicht ausreicht. Im zweiten Fall ist $k = 3$ und $3^5 = 243$ reicht aus, $3^4 = 81$ aber nicht.
Antwort 10 ist richtig.

Anmerkung:
Die angegebenen Basisgewichtel sind nicht eindeutig. Im ersten Fall wäre beispielsweise auch die Verteilung 1 kg , $2$ kg, $4$ kg, $8$ kg, $15$ kg, $30$ kg, $60$ kg möglich. Im zweiten Fall ist der Spielraum kleiner, aber man hat beispielsweise die Möglichkeit $2$ kg, $3$ kg, $9$ kg, $27$ kg und 81 kg oder 1 kg, 3 kg, 9 kg, 27 kg und 80 kg zu wählen. Dies ändert aber nichts an der Anzahl der benötigten Gewichte.

## 2008 Das schönste Rentier von allen!

Autor: Dirk Becherer Projekt: E8 und E9

### Aufgabe

Wie jedes Jahr zu Weihnachten müssen sich der Weihnachtsmann und sein Engelchen im Weihnachtsmagazin ein Rentier aussuchen. Und natürlich wollen sie zu gern das schönste Rentier bekommen.

„Oje, was ist die Auswahlprozedur dieses Jahr kompliziert“, grummelt der Weihnachtsmann. „Aber wieso denn?“, fragt das Engelchen. Der Weihnachtsmann erklärt: „Die Wichtel im Magazin führen uns nacheinander verschiedene Rentiere vor, von denen wir uns eines aussuchen dürfen. Die Rentiere verlangen jedoch, dass wir uns gleich entscheiden, ob wir das jeweilige Rentier nehmen wollen oder es ablehnen, um eines der Folgenden zu nehmen. Ein einmal abgelehntes Rentier steht also später nicht mehr zur Verfügung. Und spätenstens das zehnte Rentier müssen wir nehmen, denn dann haben die Wichtel keine Lust mehr.“ „Klingt doch spannend. Wo ist das Problem?", meint des Engelchen. „Nun ja“, brummt der Weihnachtsmann, „die Rentiere werden uns in zufälliger Reihenfolge vorgeführt, und ich habe kein Vorwissen über die Qualität des diesjährigen Rentierangebotes. Weil wir die Rentiere nicht alle vorher ansehen dürfen, können wir nicht wissen, ob das gerade angebotene Tier das Schönste ist oder ob vielleicht noch ein Besseres kommt. Entscheiden wir uns für das gerade angebotene Tier, könnte es doch sein, dass später ein noch Schöneres kommt. Entscheiden wir uns andererseits, noch weitere Tiere anzusehen, kann es uns passieren, dass wir das schönste Rentier verpassen.“

Sie überlegen nun, wie sie es am besten anstellen, um mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit, das Schönste der zehn Rentiere zu erhalten. „Mir fällt nichts Rechtes ein. Wenn wir nicht wissen, welches das Schönste sein wird, können wir genauso gut gleich das Erste nehmen“, sagt der Weihnachtsmann. „Nein, es geht besser", ruft das Engelchen, „wenn wir uns erst ein paar Exemplare ansehen! Denn dabei lernen wir etwas über die Qualität der Tiere.“ „Und wie lange willst Du das machen?“, fragt der Weihnachtsmann,
„Wenn wir bis zum letzten Tier warten, lernen wir wohl am meisten, oder?“„Schon“, schmunzelt das Engelchen, ‚aber dann hätten wir nicht mehr viel davon, weil wir uns ja nur noch für das letzte Tier entscheiden können.“ „Mmmh. Die Antwort liegt also wohl in der goldenen Mitte?“, überlegt der Weihnachtsmann. „Vielleicht nicht ganz.“, erklärt das Engelchen, „Lass uns erst $X$ Rentiere nur ansehen und danach unter den verbleibenden $10 - X$ Tieren das Nächstfolgende auswählen, welches besser ist als das Beste aus den ersten $X$ Tieren (oder das Letzte, falls kein Besseres mehr kommt).“ „Und du weisst schon, für welches $X$ die Wahrscheinlichkeit am größten wird, dass wir so das schönste Rentier auswählen?“, fragt der Weihnachtsmann hoffnungsvoll. „Ja“, lacht das Engelchen, „wir haben sogar eine Chance von fast 40 Prozent, wenn wir uns erst die optimale Anzahl $X^*$ von Tieren ansehen. Das optimale $X^*$ ist ...“

**Antwortmöglichkeiten:**

1. $X^* = 0$ (d. h. das erste Rentier wird genommen.)
2. $X^* = 1$ (d. h. nachdem ein Rentier begutachtet wurde, wird das Nächstfolgende genommen, welches besser als das Erste ist.)
3. $X^* = 2$
4. $X^* = 3$
5. $X^* = 4$
6. $X^* = 5$
7. $X^* = 6$
8. $X^* = 7$
9. $X^* = 8$
10. $X^* = 9$ (d. h., das letzte Rentier wird genommen.)

## Projektbezug

Dieses Problem ist ein Beispiel für ein stochastisches Optimierungsproblem aus der Familie der Probleme des optimalen Stoppens. Stochastische Optimierungsprobleme treten im Anwendungsbereich E (Finance) auf, etwa bei der Absicherung und Quantifikation von Finanzrisiken und der Portfoliooptimierung auf. Für eine Bewertung und Absicherung von sogenannten amerikanischen Optionen, bei denen ein Ausübungsrecht zu einem optimalen Zeitpunkt ausgeübt werden soll, müssen dabei zum Beispiel optimale Stopprobleme gelöst werden.

## Lösung

**Richtige Antwort: 4**
In einer etwas anderen Formulierung wurde dieses Problem bekannt als '*the secretary problem*'. Wir diskutieren drei verschiedene mögliche Lösungswege.

1. Wir bezeichnen mit $\xi(X)$ die Wahrscheinlichkeit, das schönste Rentier aus den $n = 10$ auszuwählen, wenn man erst $X$ Exemplare ansieht. Dann ist

   $$\xi(X) = \sum_{k=X+1}^{n} P[k\text{-tes Tier ist das Schőnste }]\cdot P[k\text{-tes Tier gewählt, wenn } k\text{-tes das Schönste ist }]$$

   Hierbei bezeichnet $P$ die Wahrscheinlichkeit (**P**robability) eines Ereignisses, und der zweite Faktor in den Summanden ist eine sogenannte bedingte Wahrscheinlichkeit. Da jede der $n$ Positionen für das schönste Tier gleichwahrscheinlich ist, gilt

   $$P[k\text{-tes Tier ist das Schönste }] = \frac{1}{n}.$$

Gegeben, dass das insgesamt schönste Tier in $k$-ter Position ist, so wird es genau dann ausgewählt, falls das schönste Tier aus den ersten $k-1$ Exemplaren an einer Position unter den ersten $X$ Tieren kommt. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{X}{k-1}$. Also ist

$$\xi(X) = \frac{X}{n} \sum_{k=X+1}^{n} \frac{1}{k-1}.$$

Durch Ausrechnen folgt, dass $\xi(X)$ bei $n = 10$ für $X = 3$ maximal ist.

2. Wir könnten auch mit dem Computer durch sogenannte Monte-Carlo Simulationen die Wahrscheinlichkeiten $\xi(X)$ approximativ berechnen lassen, um anschließend zu vergleichen, welches $X$ die höchste Erfolgswahrscheinlichkeit liefert. Bei genügend vielen Simulationen sind die Approximationsfehler klein, und das Simulationsverfahren liefert recht zuverlässig die richtige Antwort.

3. Wie können wir aber sehen, dass die optimale Lösung des Stoppproblemes in der Tat die obige Struktur '$X$ Tiere ansehen und dann das Nächstbessere nehmen' haben sollte, und es nicht eine irgendwie anders geartete noch bessere Strategie gibt?

   Bezeichne $p(y,k)$ die Wahrscheinlichkeit, dass wir mit der optimalen Strategie noch das schönste Tier auswählen, wenn wir schon beim $k$ ten Tier sind, und dieses Tier das bislang Schönste ($y = 1$) bzw. nicht das bislang Schönste ($y = 0$) ist. Unser Ziel ist es nun, $p(1,1)$ auszurechnen und die Strategie zu bestimmen, welche die optimale Erfolgswahrscheinlichkeit erreicht. Die Methode, die wir hierzu benutzen werden, ist bekannt als *dynamische Programmierung*. Sie basiert auf der Idee, dass eine Strategie dann optimal ist, wenn sie eine optimale Entscheidung für den jeweils aktuellen Schritt (das aktuelle Tier zu nehmen oder abzulehnen) trifft, und zudem für die zukünftigen Schritte optimal ist.

   Zunächst einige Vorüberlegungen: Wenn das $k-te$ Exemplar das Schönste unter den ersten $k$ Tieren ist, so ist $\frac{k}{n}$ die Wahrscheinlichkeit, dass es auch das insgesamt Schönste ist. Falls es nicht das bislang Schönste ist, ist klar, dass es nicht das insgesamt Schönste sein kann. Also ist es nur sinnvoll, ein Tier zu wählen, das zumindest das bislang Schönste ist. Es ist auch leicht zu sehen, dass $\frac{1}{k+1}$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass das $k+1$-te Tier schöner ist als alle Vorigen. Die Wahrscheinlichkeit, dass es nicht schöner ist, beträgt $\frac{k}{k+1}$.

   Für $k = n$ ist klar, dass $p(y,k)$ gleich Eins ist für $y = 1$, und Null für $y = 0$. Kennen wir schon $p(y,k+1)$ für $y = 0,1$, so bestimmen sich daraus die $p(y,k)$ für $k < n$ wie folgt:

$$\begin{aligned} p(1,k) &= \max\left\{\frac{k}{n}, \frac{1}{k+1}p(1,k+1) + \frac{k}{k+1}p(0,k+1)\right\}, \\ p(0,k) &= \frac{1}{k+1}p(1,k+1) + \frac{k}{k+1}p(0,k+1). \end{aligned}$$

   Das Maximum entspricht dabei der Entscheidung in Position $k$ zwischen den zwei möglichen Alternativen, das gegenwärtige bislang schönste Tier zu nehmen oder weiterzugehen. Diese Entscheidung wird optimal gerade so getroffen, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit maximiert wird. Mit obigem Algorithmus erhalten wir nicht nur

$p(1, 1) = 0.3987$, sondern auch die optimale Strategie. Der optimale Zeitpunkt für die Entscheidung für ein bislang schönstes ($y = 1$) Rentier ist gerade das

erste $k$, für welches das Maximum gleich $\frac{k}{n}$ ist. Wenn wir alle $p(y, k)$ berechnet haben, stellt sich durch Vergleichen von $p(1, k)$ mit $\frac{k}{n}$ heraus, dass die Strategie aus der 4. Antwortm¨oglichkeit optimal ist.

# 2009 Der Antrag

Autoren: Volker Mehrmann, Falk Ebert

## Aufgabe

Habt Ihr Euch schon mal gefragt, wie es ein alter Mann am Nordpol schafft, unter widrigsten klimatischen Bedingungen ein Wirtschaftsunternehmen am laufen zu halten? Und nicht etwa irgendeins, sondern ein weltweit operierendes Konsortium, das jährlich Milliarden von Menschen beschenkt. Wie werden Löhne gezahlt, woher kommen die Rohstoffe und dann die Energiekosten? Es liegt nahe, dort kriminelle Machenschaften zu vermuten, für die der rundliche Mann mit dem Schlitten und den tollen Giveaways nur Fassade ist. Wir können Euch aber beruhigen. Alles ist absolut legal. Hinter der ganzen Schenkerei ist eine noch viel höhere Instanz, nämlich die sogenannten Dezember-Festivitäts-Gönner oder auch kurz DFG. Die stellen das ganze Geld zur Verfügung, das der Weihnachtsmann dann sinnvoll in Geschenke umwandelt. Die DFG vergeben das Geld gern - man muss sie nur lieb darum bitten. Und bitten heißt konkret: einen Antrag schreiben, in dem haarklein dargelegt wird, wofür das Geld ausgegeben wird. Das schiere Ausmaß dieses Antrages ist der Grund dafür, warum Weihnachten nur einmal im Jahr ist. Die Geschenke sind schnell gebaut, aber der Antrag benötigt die meiste Zeit des Jahres.

Nun gibt es im Weihnachtsmann-Konsortium je 10 Einzelgruppen in den 6 Bereichen Lebkuchenwissenschaften, Logistik, Geschenkeproduktion, Optische Verschönerung von Geschenken, Weihnachtsfinanzierung sowie Computerspiele. Außerdem gibt es noch 4 Gruppen aus dem Bereich „Zusätzliches", die sich zum Beispiel um die Ausbildung junger Weihnachtswichtel kümmern. Jede von diesen Gruppen muss einen eigenen Bericht schreiben, in dem sie darlegen, wie wichtig sie für den Weihnachtsmann sind, was für tolle Geschenke sie bauen und warum sie so viel Geld haben wollen. Aus diesen Teilberichten wird letztendlich dann der Antrag zusammengefügt. Leider sind in jedem Teilbericht erfahrungsgemäß etwa 10 Schreibfehler enthalten. Weil die DFG für solche Fehler die Finanzierung kürzen, wird der Antrag am Ende noch mal penibel auf Fehler geprüft. Das Ganze geht natürlich elektronisch und online im Winternet. Dazu schauen sich 3 Orthographiewichtel unabhängig voneinander den Antrag an. Jeder findet mit der absolut gleichen Wahrscheinlichkeit eine

Zahl von Fehlern, die zwischen 0 und der Gesamtzahl der vorhandenen Fehler liegt. (Dabei sind 0 gefundene Fehler und das Finden aller Fehler mit eingeschlossen. Alle Wichtel haben die gleichen Chancen.) Dann überschreibt jeder Wichtel einfach die letzte Version des Antrags mit seiner Korrekturfassung. Das führt dazu, dass die Korrekturversion des Wichtels, der die meisten Fehler gefunden hat und der damit auch am längsten gebraucht hat, die vorläufige Endversion wird. Das kratzt natürlich an der Ehre der beiden Orthographiewichtel, die jetzt komplett umsonst gearbeitet haben. Also wird mit der vorläufigen Endversion noch einmal so verfahren. Alle drei prüfen wieder unabhängig voneinander und die Version, in der die meisten Fehler gefunden werden, wird zum Zwischensieger erklärt. Und damit alle 3 eine Chance haben, Zwischensieger zu werden, gibt es noch genauso eine dritte Runde des Korrekturwettstreits. Wichtelehrgeiz hin oder her - danach ist Schluss! Die letzte Korrekturfassung wird an die DFG abgegeben. Die Frage ist nur: Wie viele Fehler sind in der letzten Fassung durchschnittlich noch drin?

**Antwortmöglichkeiten:**

1. gar keine, die sind bereits nach der zweiten Runde alle raus
2. 0-2
3. 5-6
4. 9-12
5. 25-35
6. genau 42
7. $50 - 60$
8. etwa 80
9. etwa 120
10. etwa 160

**Beispiel**: *Die 3 Wichtel prüfen auf die gleiche Art einen anderen Text, in dem 10 Fehler drin sind. In der ersten Runde finden sie unabhängig voneinander 3, 5 und 6 Fehler. Demnach sind nach dem ersten Durchgang noch 4 Fehler in dem Text. In der kommenden Runde finden sie 1, 2 und 4 Fehler also sind nach der 2. Runde 0 Fehler im Text. In der 3. Runde finden alle 0 Fehler und damit ist der Text nach 3 Runden fehlerfrei.*

## Projektbezug:

Das Antragsverfahren entspricht in vereinfachter Form etwa dem, das das MATHEON alle 4 Jahre (glücklicherweise nicht in jedem Jahr!) durchläuft. Und manchmal läuft die Korrektur - eher ungewollt - auch wie in der Aufgabe ab.

## Lösung

**Richtige Antwort: 4**

Die erste Vorüberlegung sollte sein: 6 Bereiche mit je 10 Gruppen und 4 Extragruppen sind insgesamt 64. Wenn jede 10 Fehler in den Antrag einbaut, sind das insgesamt 640. Wir versuchen zuerst herauszufinden, wieviele Fehler nach einer Korrekturrunde noch in dem Antrag drin sind. Dazu gibt es verschiedene Lösungswege, die alle verschiedene Grundkenntnisse voraussetzen, aber fast identische Lösungen liefern.

## Lösung 1

Wenn es nur einen Korrektor gäbe, dann wäre seine Korrekturfassung automatisch die beste. Der Anteil der gefundenen Fehler liegt irgendwo zwischen 0 und 1. Es gibt keinen Grund anzunehmen, dass er in irgendeiner Weise näher an der 0 oder näher an der 1 liegen sollte. Dementsprechend sagt die Intuition, dass ein Korrektor im Mittel die Hälfte der Fehler findet. Wie sieht es jetzt bei $n$ Korrektoren aus? Jeder von denen findet wieder einen gewissen Anteil der Fehler und uns interessiert, wie viele maximal gefunden werden. Dazu nennen wir die gefundenen Fehleranteile $p_1$ bis $p_n$ und nehmen der Einfachheit halber an, dass $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$ gilt. Wiederum gibt es keinen Grund, warum irgendein Bereich zwischen 0 und 1 wahrscheinlicher für die gefundenen Anteile sein sollte. Analog zu dem Fall mit nur einem Korrektor, können wir jetzt also davon ausgehen, dass $p_1$ mittig zwischen 0 und $p_2$ liegt, $p_2$ mittig zwischen $p_1$ und $p_3$ usw. Folglich liegen die Anteile im Mittel so, dass die Intervalle $[0, p_1], [p_1, p_2], \ldots [p_n, 1]$ alle die gleiche Länge haben, weil bei gleichwahrscheinlichen $p_i$ kein Grund besteht, warum eines der Intervalle kürzer oder länger sein sollte. Insgesamt gibt es $n+1$ solche Intervalle und damit liegt $p_n$ im Mittel bei

$$p_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Das passt auch gut zu dem erwarteten Ergebnis bei $n = 1$ Korrektoren. Im Fall von 3 Korrektoren werden in jeder Runde also etwa $\frac{3}{4}$ der Fehler gefunden. Demnach verbleiben in jeder Runde noch $\frac{1}{4}$ der Fehler. Nach 3 Durchgängen sind das also $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$. Bei ursprünglich 640 Fehlern bleiben also noch 10.

## Lösung 2

Vorüberlegung: Angenommen, es gäbe keine Fehler in dem Antrag, dann hat jeder Korrektor genau eine Möglichkeit, eine gewisse Anzahl - nämlich 0 zu finden. Wenn wir die gefundenen Fehler der drei Korrektoren als Tripel darstellen, ist das genau ein Tripel: $(0, 0, 0)$. Sobald es einen Fehler gibt, hat jeder der Korrektoren zwei gleichwahrscheinliche Chancen, nämlich entweder 0 oder 1 Fehler zu finden. Jetzt gibt es $2^3 = 8$ Möglichkeiten, die gefundenen Fehler als Tripel darzustellen, nämlich $(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)$. Genau eines dieser Tripel führt zu einem Maximum von 0 gefundenen Fehlern, die restlichen $2^3 - 1 = 7$ liefern 1 als Maximum. Wenn wir jetzt von 2 Fehlern im Antrag ausgehen, kann jeder Korrektor 0 , 1 oder 2 finden, hat also 3 Möglichkeiten. Insgesamt gibt es jetzt $3^3 = 27$ Tripel, welche die gefundenen 2 oder weniger Fehler darstellen. Eines davon $(0, 0, 0)$ liefert 0 als Maximum. Die weiteren 7 , die wir in der letzten Betrachtung gefunden haben, sind natürlich auch unter den Möglichkeiten. Diese

$1 + \left(2^3 - 1\right) = 2^3$ Möglichkeiten liefern also keine 2 gefundenen Fehler. Das heißt also, dass die restlichen $3^3 - 2^3 = 19$ Tripel jeweils mindestens eine 2 beinhalten, demnach zu einem Maximum von 2 führen. Wenn wir den Gedanken fortsetzen, heißt das, dass es bei $n$ Fehlern im Antrag für jeden Korrektor $n + 1$ Möglichkeiten gibt, Fehler zu finden. Insgesamt gibt es $(n + 1)^3$ Möglichkeiten, Tripel aufzustellen. Davon führt genau eines zu 0 maximal gefundenen Fehlern, 7 führen zu einem gefundenen Fehler, 19 zu zwei Fehlern. Allgemein gilt, dass es $(k + 1)^3 - k^3$ Möglichkeiten gibt, dass als Maximum genau $k$ Fehler gefunden werden. Wir nennen $X_i, i = 1, 2, 3$ die Zufallsvariable, welche angibt, wieviel Fehler jeder Korrektor findet. Es gilt $P\left(X_i = k\right) = \frac{1}{n+1}$ weil jeder Wert zwischen 0 und der Gesamtzahl gleichwahrscheinlich ist. Mit den obigen Überlegungen haben wir dass

$$P\left(\max\left(X_1, X_2, X_3\right) = k\right) = \frac{(k+1)^3 - k^3}{(n+1)^3}.$$

Damit können wir den Erwartungswert der gefundenen Fehler bestimmen.

$$\begin{aligned} E\left(\max\left(X_1, X_2, X_3\right)\right) &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot P\left(\max\left(X_1, X_2, X_3\right) = k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \frac{(k+1)^3 - k^3}{(n+1)^3}. \end{aligned}$$

Dieser Term lässt sich vereinfachen zu

$$\begin{aligned} E\left(\max\left(X_1, X_2, X_3\right)\right) &= \frac{1}{(n+1)^3} \sum_{k=0}^{n} k^4 + 3k^3 + 3k^2 + k - k^4 \\ &= \frac{1}{(n+1)^3} \left( 3 \sum_{k=0}^{n} k^3 + 3 \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k \right). \end{aligned}$$

Die Terme für die Potenzsummen sind schnell gefunden - immerhin hat man ja das Internet.

$$E\left(\max\left(X_1, X_2, X_3\right)\right) = 3 \frac{(n(n+1))^2}{4(n+1)^3} + 3 \frac{(2n+1)(n+1)n.}{6(n+1)^3} + \frac{n(n+1)}{2(n+1)^3}$$

Dieser Term lässt sich mit etwas Rumrechnerei vereinfachen zu

$$E\left(\max\left(X_1, X_2, X_3\right)\right) = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4(n+1)}\right) n$$

Wieder zeigt sich, dass etwa 3/4 (und ein klein wenig mehr) der Fehler im Durchschnitt in einem Durchgang gefunden werden. Und wenn man diese kleine Abweichung von den 3/4 ignoriert, kann man auch die gleiche Argumentation wie bei dem intuitiven Lösungsansatz verwenden und kommt letztendlich auf 10 verbleibende Fehler. Wenn man die kleine Abweichung mit einrechnen will, dann wird die Bildung des Erwartungswertes über 3 Durchgänge deutlich komplizierter, weil man dann alle Kombinationen von gefundenen Fehlern über 3 Runden berücksichtigen muss.

# 2010 Korrupte UEFA

Autor: Gregor Heyne (MATHEON)


## Aufgabe

Schriftführer Sigismund schreibt (mal wieder): Der Weihnachtsmann ist immer noch verschwunden. Mittlerweile hat das durchaus Auswirkungen auf die Arbeitsmoral. Heute morgen ist ein 2 Jahre alter Streit wieder aufgeflammt. Im März 2008 ereignete sich nämlich Folgendes. Während der Mittagspause verfolgten die Weihnachtswichtel und der Chef die Radioübertragung der Auslosung der Viertelfinalbegegnungen in der Champions League. Es wurden die folgenden vier Begegnungen ausgelost:

1. Arsenal - Liverpool,
2. AS Rom - Manchester United,
3. Schalke - Barcelona,
4. Fenerbahce Istanbul - Chelsea.

Am Abend stellte der Weihnachtsmann fest, dass etwa anderthalb Stunden vor der Auslosung ein Mitglied eines Internet-Forums des FC Liverpool eine Nachricht verbreitet hat, in der er behauptete: *Es kursieren Gerüchte, nach denen die Auslosung manipuliert sei. Er glaube das zwar nicht. Wenn es aber doch zutreffe, seien es die folgenden vier Begegnungen.* Dann nannte er genau die Spiele, die dann später gezogen worden waren, und zwar auch in der richtigen Reihenfolge der Gegner (durch die ja das Heimrecht geregelt ist). Zusätzlich hatte der Autor dieser Nachricht auch noch die zugleich ausgelosten Halbfinals, inklusive der Reihenfolge der Teams, (Spiele werden nummeriert, und dann werden Nummern gezogen) richtig vorhergesagt.

Dieses seltsame Ereignis [3] wurde noch Tage später lebhaft in verschiedenen Internetforen diskutiert, unter dem Titel: Ist die UEFA korrupt? Eine in den Medien verbreitete Antwort der UEFA auf viele aufgebrachte Mails lautete lakonisch: *he was just lucky and guessed the matches.*
Auch die Weihnachtswichtel diskutierten nun angeregt darüber, wie hoch denn die Wahrscheinlichkeit sei, die richtigen Spielansetzungen zu raten. Der Weihnachtsmann versprach dem Wichtel, der die korrekte Antwort ermittelt, eine Woche Ferien zusätzlich. Bisher hat nur keiner eine überzeugende Antwort geben können. Und nun, da der Weihnachtsmann weg ist, und sich etwas Langeweile breit macht, kam die Diskussion wieder auf. Welche der von den Wichteln genannten Wahrscheinlichkeiten ist denn nun richtig - oder möglichst nah am richtigen Wert? Dann könnte man die Sache nämlich abhaken und die Wichtel könnten wieder weiterarbeiten.

**Antwortmöglichkeiten:**

1. 1/967680
2. 1/1000000
3. 1/40320
4. 1/568
5. 1/483840
6. 1/10
7. 1/20160
8. 1/4032
9. 1/80640
10. 1/90740

**Hinweis**: Um potentiellen Verwirrungen unter Fußballlaien vorzubeugen:

- Das Spiel *Arsenal - Liverpool* ist ein anderes Spiel als *Liverpool - Arsenal*, weil wichtig ist, wer bei wem im Heimstadion spielt.
- Ob die Begegnung *Arsenal - Liverpool* vor oder nach *AS Rom - Manchester United* gezogen wird, ist egal. Hauptsache, das Spiel kommt zustande.
- Zu den Halbfinalspielen: In der Reihenfolge, in der die Spiele stattfinden, werden Nummern in den Topf geworfen. Für das erste Halbfinale werden dann 2 Nummern gezogen (Reihenfolge wichtig) und für das zweite Halbfinale ebenso.
- Ob Halbfinalspiel 1 vor Halbfinale 2 oder umgekehrt gezogen wird, ist unerheblich, weil man ja nur wissen will, wer gegen wen spielt.

[3] Es handelt sich hier um eine wahre Begebenheit. Siehe auch: http://www.liverpooldailypost.co.uk/liverpool-fc/liverpool-fc-news/2008/03/14/daily-post-forums-swamped-by-champions-league-claim-64375-20624765/

## Lösung

**Richtige Antwort: 7**

Die Wahrscheinlichkeit die Viertelfinalansetzungen richtig zu raten kann wie folgt bestimmt werden:
Exp. 1: ziehe Team 1 für Spiel 1: 8 Möglichkeiten
Exp. 2: ziehe Team 2 für Spiel 1: 7 Möglichkeiten
Exp. 3: ziehe Team 1 für Spiel 2: 6 Möglichkeiten
Exp. 4: ziehe Team 2 für Spiel 2: 5 Möglichkeiten
Exp. 5: ziehe Team 1 für Spiel 3: 4 Möglichkeiten
Exp. 6: ziehe Team 2 für Spiel 3: 3 Möglichkeiten
Exp. 7: ziehe Team 1 für Spiel 4: 2 Möglichkeiten
Exp. 8: ziehe Team 2 für Spiel 4: 1 Möglichkeit.

Es gibt nach dem allgemeinen Zählprinzip also 8! Möglichkeiten, die 4 Begegnungen mit Berücksichtigung der Reihenfolge zu ziehen. Die Reihenfolge der 4 Spiele spielt keine Rolle bei der Ziehung. Es gibt 4! mögliche Permutationen der 4 Spiele. Also gibt es insgesamt $\frac{8!}{4!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ verschiedene Resultate der Viertelfinalauslosung.

Für die zusätzliche Auslosung der Halbfinals geht man wie folgt vor. Spiele des Viertelfinals werden durchnumeriert von 1 bis 4.
Exp. 1: ziehe Team 1 für Spiel 1: 4 Möglichkeiten
Exp. 2: ziehe Team 2 für Spiel 1: 3 Möglichkeiten
Exp. 3: ziehe Team 1 für Spiel 2: 2 Möglichkeiten
Exp. 4: ziehe Team 2 für Spiel 2: 1 Möglichkeit.

Also gibt es 4! mögliche Auslosungen der Spiele bei Berücksichtigung der Reihenfolge der Auslosung. Da auch hier das Heimrecht wieder relevant ist, ist die Reihenfolge der Teams in den Spielen wichtig. Lediglich die Reihenfolge der beiden Halbfinalpaarungen ist irrelevant. Also gibt es $\frac{4!}{2!} = 12$ mögliche Ausgänge der Halbfinalauslosung.

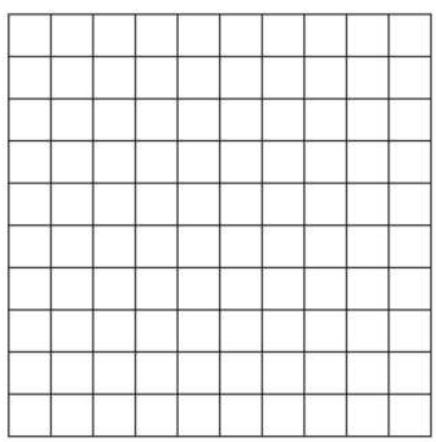
Nimmt man die beiden richtigen Vorhersagen zusammen, hatte der Schreiber der Mail also eine Chance von 1 zu $1680 \cdot 12 = 20160$, die richtigen Ergebnisse der Auslosung zu erraten.

# 2011 Geschenkeverpackung

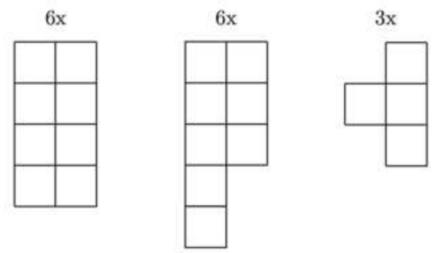
Autor: Marco Sarich


## Aufgabe

„Oh nein!“ schreit es aus dem Wichtellager. Das Geschenkpapier neigt sich dramatisch dem Ende entgegen. Nur noch ein einziges, quadratisches Blatt steht den eifrigen Packhelfern zur Verfügung.



Das muss noch für 15 Geschenke reichen, die allerdings unterschiedlich viel Material verbrauchen und verschiedene Schnitte benötigen.




Die Wichtel fangen an zu streiten, wie das Geschenkpapier am besten aufgeteilt werden soll. Schon bald ertönen erste Vermutungen, dass das Papier nicht für alle Geschenke reichen kann. Andere Stimmen sind dagegen ganz anderer Meinung. Einigkeit herrscht nur in einer Sache: Es sollen zumindest so viele Geschenke wie möglich verpackt werden. Aber wie viele Geschenke sind denn nun durch kluges Aufteilen des Papiers höchstens zu verpacken?

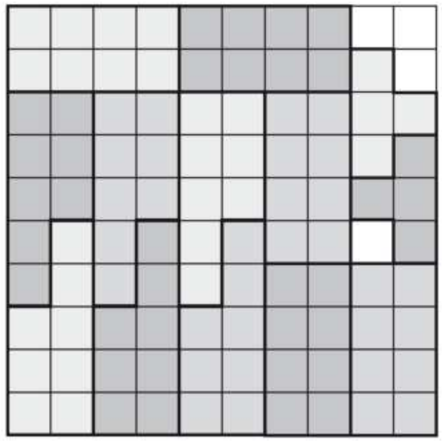
**Antwortmöglichkeiten:**

1. 15
2. 14
3. 13
4. 12
5. 11
6. 10
7. 9
8. 8
9. 7
10. 6

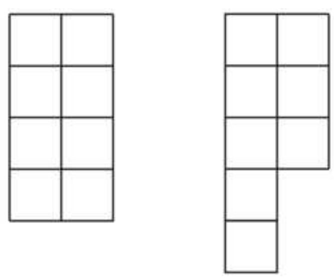
## Lösung

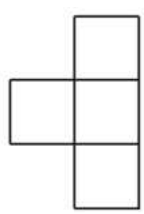
**Richtige Antwort: 3** Eine Lösung für 13 Geschenke ist zum Beispiel durch folgendes Schnittmuster gegeben.
Die Frage ist allerdings, warum die Lösung auch optimal ist, also man nicht noch mehr Geschenke verpacken kann.
1) Es ist nicht möglich, alle Geschenke zu verpacken, da die Fläche des Geschenkpapiers nur aus 100 Kästchen besteht, die 15 Geschenke aber insgesamt 108 Kästchen benötigen würden, da

$$6 \cdot 8 + 6 \cdot 8 + 3 \cdot 4 = 108.$$



2) Nun muss man nur überlegen, ob es nicht doch möglich sein kann, 14 Geschenke zu verpacken. Damit das überhaupt funktionieren kann, ist klar, dass man eines der Geschenke, die 8 Kästchen Verpackungsmaterial benötigen würden, aus dem Spiel lassen muss. Die restlichen Geschenke benötigen dann nämlich nur noch 100 Kästchen Papier: genau so viel, wie die Wichtel noch zur Verfügung haben. Allerdings ist es trotzdem nicht möglich, die verbleibenden Geschenke zu verpacken. Stellt man sich das Papier in einem Schachbrettmuster markiert vor, so gibt es genau gleich viele weiße wie schwarze Felder. Die beiden Schnittmuster haben diese Eigenschaft auch, es sind immer 4 weiße und 4 schwarze Felder. Bei dem letzten Schnittmuster sieht das jedoch anders aus. Bei jedem Papierausschnitt wären 3 der 4 Kästchen gleichfarbig. Zudem müssen drei Geschenke mit diesem Muster eingepackt werden. Das bedeutet, dass bei diesen drei Schnittmustern insgesamt nicht gleich viele Felder schwarz wie weiß sein können. Somit kann man 13 Geschenke verpacken.





## 2012 Wichteldemokratie

Autor: Gerhard Woeginger

### Aufgabe

Die 15 Wichtel Atto, Bilbo, Chico, Dondo, Espo, Frodo, Gumbo, Harpo, Izzo, Jacco, Kuffo, Loco, Mirko, Nemmo und Onno wollen 100 Kekse untereinander aufteilen. Das führt sofort zu Problemen: Erstens darf (wegen der Krümel) keiner der Kekse zerteilt werden. Zweitens ist 100 nicht glatt durch 15 teilbar. Drittens gibt es Streit.

Die Wichtel einigen sich schließlich auf eine durch und durch demokratische Vorgehensweise. Der alphabetisch letzte Wichtel in der Gruppe wird zum Aufteilungsleiter (nicht zu verwechseln mit einem Abteilungsleiter) ernannt und schlägt eine Aufteilung der 100 Kekse an alle teilnehmenden Wichtel ihn selbst eingeschlossen - vor. Dann wird über seinen Vorschlag abgestimmt.

- Falls es eine oder gar keine Gegenstimme gibt, so ist der Vorschlag angenommen. Die Kekse werden entsprechend aufgeteilt und es gibt keine weiteren Abstimmungen.
- Falls es aber zwei oder mehr Gegenstimmen gibt, so wird der Aufteilungsleiter abgesetzt und für seinen schlechten Vorschlag schwer bestraft. Er verliert jegliches Anrecht auf die Kekse, darf bei den weiteren Abstimmungen nicht mitmachen und muss stattdessen einen furchtbar sauren grünen Apfel aufessen. Dann wird die Prozedur mit einem neuen Aufteilungsleiter - und einem Wichtel weniger - wiederholt.

Die Wichtel nehmen ihre Demokratie sehr ernst; es wird immer ehrlich abgestimmt und es gibt weder Absprachen noch Geheimabsprachen und schon gar keine Verschwörungen. Die Ziele der 15 Wichtel bei den Abstimmungen sind einfach zu beschreiben: Oberstes Ziel jedes Wichtels ist es, nicht selbst in einen sauren Apfel beißen zu müssen. Ein fast genauso wichtiges Ziel ist es, möglichst viele Kekse zu erhalten. Und schließlich finden die Wichtel es ziemlich lustig, wenn ein anderer einen sauren Apfel essen muss. Hat ein Wichtel also zwischen zwei Situationen zu wählen, die ihm jeweils dieselbe Anzahl von Keksen bringen und in denen er selbst keinen sauren Apfel essen muss, so entscheidet er sich immer für die Situation, in der mehr grüne Äpfel gegessen werden.

Der äußerst kluge und bedächtige Onno wird als alphabetisch letzter Wichtel zum ersten Aufteilungsleiter ernannt. Onno denkt lange nach und macht dann den für ihn bestmöglichen Aufteilungsvorschlag.

Welche der folgenden Aussagen trifft für Onnos Aufteilungsvorschlag zu?

**Antwortmöglichkeiten:**

1. Onno kriegt 2 Kekse und jeder andere Wichtel kriegt 7 Kekse.
2. Onno kriegt 3 Kekse und Izzo kriegt 8 Kekse.
3. Onno kriegt 4 Kekse und Espo kriegt 11 Kekse.
4. Onno kriegt 5 Kekse und Loco kriegt 8 Kekse.
5. Onno kriegt 6 Kekse und Dondo kriegt 8 Kekse.
6. Onno kriegt 7 Kekse und Kuffo kriegt 7 Kekse.
7. Onno kriegt 8 Kekse und Frodo kriegt 3 Kekse.
8. Onno kriegt 9 Kekse und Atto kriegt 13 Kekse.
9. Onno kriegt 10 Kekse und Harpo kriegt 8 Kekse.
10. Onno kriegt kein Keks und muss auf jeden Fall in den sauren Apfel beißen.

## Lösung

**Richtige Antwort: 8**

Diese Aufgabe denkt man sich am besten von hinten (nur noch 2 Wichtel übrig) nach vorne (alle 15 Wichtel vorhanden) durch. Für jede natürliche Zahl $n$ mit $2 \leq n \leq 15$ werden wir zeigen, dass es für die Situation mit $n$ Wichteln einen eindeutigen Aufteilungsvorschlag $V_n$ gibt, der für den Aufteilungsleiter das bestmögliche Ergebnis liefert. Wenn also einer der anderen verbleibenden Wichtel einen konkreten Aufteilungsvorschlag $X$ für sich beurteilen will, so braucht er $X$ nur mit dem Vorschlag $V_{n-1}$ zu vergleichen. Falls $X$ für ihn besser als

$V_{n-1}$ ist, so stimmt er für $X$, und andernfalls stimmt er gegen $X$.

Wir beginnen mit dem Fall mit $n = 2$ verbleibenden Wichteln Atto und Bilbo. Da Aufteilungsleiter Bilbo jede Abstimmung mit höchstens einer Gegenstimme gewinnen kann, wird Bilbo sich alle 100 Kekse sichern und den für ihn bestmöglichen Aufteilungsvorschlag $V_2$ mit $A = 0$ und $B = 100$ machen.

Im Falle von $n = 3$ Wichteln (Atto, Bilbo, Chico) muss Aufteilungsleiter Chico sich die Stimme von Atto oder Bilbo sichern. Bilbo stimmt auf jeden Fall gegen Chicos Vorschlag $V_3$, da ihm der Vorschlag $V_2$ alle 100 Kekse zuweist. Atto zieht jeden Vorschlag mit $A = 1$ dem Vorschlag $V_2$ mit $A = 0$ vor. Atto wird gegen jeden Vorschlag mit $A = 0$ stimmen, da ihm der Vorschlag $V_2$ ebenfalls $A = 0$ Kekse garantiert und er Chico gerne in den sauren Apfel beißen sieht. Also macht Chico den Vorschlag $V_3$ mit $A = 1$, $B = 0, C = 99$ und gewinnt die Abstimmung.

Im Falle von vier Wichteln (Atto, Bilbo, Chico, Dondo) muss Aufteilungsleiter Dondo sich die Stimmen von zwei anderen Wichteln sichern, indem er ihnen ein besseres Angebot als Vorschlag $V_3$ macht. Attos Stimme kostet 2 Kekse, Bilbos Stimme kostet 1 Keks, und Chicos Stimme kostet 100 Kekse. Also macht Dondo den Vorschlag $V_4$ mit $A = 2, B = 1, C = 0, D = 97$ und gewinnt die Abstimmung.

Im Falle von fünf Wichteln (Atto, Bilbo, Chico, Dondo, Espo) muss Espo sich die Stimmen von drei anderen Wichteln sichern. Attos Stimme kostet 3 Kekse, Bilbos Stimme kostet 2 Kekse, Chicos Stimme kostet 1 Keks, und Dondos Stimme kostet 98 Kekse. Also macht Espo den Vorschlag $V_5$ mit $A = 3, B = 2, C = 1, D = 0, E = 94$ und gewinnt die Abstimmung.

Und so weiter, und so fort. Die folgende Tabelle listet die bestmöglichen Vorschläge $V_n$ für den Aufteilungsleiter auf. Die letzte Zeile zeigt, dass Onno sich mit Vorschlag $V_{15}$ genau 9 Kekse sichern kann und dass $V_{15}$ dem Atto 13 Kekse zuweist.

## 2013 Mützen

Autor: Gerhard Woeginger

### Aufgabe

Der Weihnachtsmann hat 126 Intelligenzwichtel zu einem gemütlichen Nachmittag mit Kaffee und Kuchen eingeladen. Als die Wichtel den Saal betreten, bekommt jeder von ihnen hinterrücks eine neue Wichtelmütze auf den Kopf gesetzt. Das geht blitzschnell, sodass keiner von ihnen die Farbe der eigenen Mütze zu sehen kriegt. Der Weihnachtsmann eröffnet das Treffen mit einer kurzen Rede.

*„Meine lieben Intelligenzwichtel! Wir wollen diesen Nachmittag mit einem kleinen Denkspiel beginnen. Keiner von euch kennt die Farbe der eigenen Mütze, und jeder von euch kann die Mützen aller anderen 125 Wichtel sehen. Ziel dieses Spieles ist es, die Farbe der eigenen Mütze möglichst schnell und durch reines Nachdenken herauszufinden. Ich werde nun im Fünf-Minuten-Takt mit meiner grossen Weihnachtsglocke läuten. Wenn einer die eigene Mützenfarbe herausgefunden hat, so muss er beim nächsten Läuten sofort den Saal verlassen. Im Nebenzimmer bekommt er dann eine Tasse Kaffee und ein grosses Stück Sachertorte serviert.“*

Der Weihnachtsmann will gerade zur Glocke gehen, als dem Wichtel Atto eine wichtige Frage einfällt: *„Ja ist es denn wirklich für jeden von uns möglich, seine Mützenfarbe durch logisches Denken zu bestimmen? Wenn zum Beispiel jeder von uns eine andere Mützenfarbe hätte, dann könnte wohl niemand seine Farbe durch Denken herausfinden. Dann wäre das Spiel für uns doch nicht zu gewinnen!“* Der Weihnachtsmann entgegnet ihm ein wenig unwirsch: *„Hätte, könnte, wäre!!! Natürlich kann jeder von euch dieses Spiel gewinnen! Ich habe die Mützenfarben sehr sorgfältig ausgewählt, sodass jeder von euch tatsächlich seine Farbe im Laufe des Spiels durch Denken herleiten kann.“* Und dann beginnen die Wichtel zu denken. Und der Weihnachtsmann beginnt zu läuten.

- Beim ersten Läuten verlassen Atto und neun andere Wichtel den Saal.
- Beim zweiten Läuten gehen alle Wichtel mit butterblumengelben, dotterblumengelben, schlüsselblumengelben und sonnenblumengelben Mützen aus dem Saal.
- Beim dritten Läuten gehen alle Wichtel mit karmesinroten Mützen, beim vierten Läuten alle mit kaktusgrünen Mützen, beim fünften Läuten alle mit aquamarinblauen Mützen, beim sechsten Läuten alle mit goldorangen Mützen, beim siebten Läuten alle mit bernsteinbraunen Mützen und beim achten Läuten gehen alle mit muschelgrauen Mützen.
- Beim neunten, zehnten, elften und zwölften Läuten verlässt niemand den Saal.
- Beim dreizehnten Läuten gehen alle Wichtel mit blütenweissen und alle Wichtel mit ebenholzschwarzen Mützen.

Und so geht es weiter. Beim $N$-ten Läuten des Weihnachtsmanns verlässt schließlich die letzte Wichtelgruppe den Saal. Ganze sieben Mal hat der Weihnachtsmann zwischendurch geläutet, ohne dass jemand aus dem Saal gegangen wäre (und bei diesen sieben Malen sind das neunte, zehnte, elfte und zwölfte Läuten bereits mitgezählt). Unsere Frage lautet nun: Wie groß ist $N$?

**Antwortmöglichkeiten:**

1. $N = 17$
2. $N = 18$
3. $N = 19$
4. $N = 20$
5. $N = 21$
6. $N = 22$
7. $N = 23$
8. $N = 24$
9. $N = 25$
10. $N = 26$

## Lösung

### Richitge Antwort: 2

Betrachten wir zunächst einmal die Situation vor dem ersten Läuten des Weihnachtsmanns. Der Wichtel Atto sieht sich um und stellt dabei fest, dass Bilbo als einziger Wichtel eine tomatenroten Mütze trägt. Der Weihnachtsmann hat gesagt, dass jeder Wichtel seine eigene Mützenfarbe durch Nachdenken herausfinden kann. Wie um alles in der Welt soll Bilbo seine Mützenfarbe bestimmen? Falls Bilbo keine einzige andere tomatenrote Mütze sieht, so kann er sicher nicht entscheiden, ob seine eigene Mütze feuerrot oder ziegelrot oder tomatenrot ist oder vielleicht auch eine ganz andere Farbe hat. Nein, Bilbo muss auf jeden Fall eine tomatenrote Mütze auf dem Kopf eines anderen Wichtels sehen. Da Atto aber keine weitere tomatenrote Mütze entdecken kann, folgert Atto nun daraus, dass die von Bilbo gesehene tomatenrote Mütze auf Attos eigenem Kopf sitzen muss. Atto steht auf und verlässt beim ersten Läuten den Saal. Bilbo denkt sich die Situation natürlich genau symmetrisch durch: Er sieht Atto als einzigen mit tomatenroter Mütze, und folgert daraus, dass seine eigene Mütze ebenfalls tomatenrot ist. Gemeinsam mit Atto und Bilbo verlassen noch vier weitere Wichtelpaare beim ersten Läuten den Saal: Alpo und Barbo mit mohnroten Mützen, Akko und Bebbo mit rosenroten Mützen, Archo und Bodo mit weichselroten Mützen und Ando und Buzzo mit zinnoberroten Mützen.

Und was passiert vor dem zweiten Läuten? Chico sieht sich im Saal um und stellt fest, dass Coco und Cambo die einzigen Wichtel mit butterblumengelben Mützen sind. Warum ist Coco denn nicht schon beim ersten Läuten aus dem Saal gegangen? Falls Coco nur einen einzigen anderen Wichtel mit butterblumengelber Mütze gesehen hat, so konnte er daraus (analog zu Attos und Bilbos obigen Überlegungen) schliessen, dass seine eigene Mütze butterblumengelb ist, und beim ersten Läuten aus dem Saal gehen. Da Coco das aber nicht getan hat, muss er noch einen weiteren Wichtel mit butterblumengelber Mütze sehen, und dieser weitere Wichtel kann nur Chico selbst sein. Daher verlässt Chico nun beim zweiten Läuten den Saal. Mit ihm gehen Coco und Cambo (die sich die Situation symmetrisch durchgedacht haben) und drei weitere Dreiergruppen von Wichteln mit dotterblumengelben, schlüsselblumengelben und sonnenblumengelben Mützen.

Was passiert vor dem dritten Läuten? Dondo sieht, dass Darko, Dezzo und Duffo die einzigen anderen Wichtel mit karmesinroten Mützen im Saal sind. Warum ist Darko nicht schon beim zweiten Läuten aus dem Saal gegangen? Falls Darko nur zwei weitere Wichtel mit karmesinroten Mützen gesehen hat, so konnte er daraus (analog zu Chicos obigen Überlegungen) schließen, dass seine eigene Mütze karmesinrot ist, und beim zweiten Läuten aus dem Saal gehen. Da Darko das nicht getan hat, muss er noch einen weiteren Wichtel mit karmesinroter Mütze sehen, und dieser weitere Wichtel muss Dondo sein. Dondo verlässt daher den Saal, und mit ihm gehen Darko, Dezzo und Duffo. Und so weiter, und so fort. Wenn sich zu Anfang des Spiels genau $k$ Wichtel mit der selben fixen Mützenfarbe im Saal befinden, so verlässt diese Gruppe beim $(k-1)$-ten Läuten des Weihnachtsmanns geschlossen den Saal. Die folgende Tabelle listet die Anzahl der Wichtel auf, die bis zum dreizehnten Läuten den Saal verlassen.

| Runde | Kommentar | Anzahl |
|---|---|---|
| 1. Läuten | fünf Wichtelpaare: $5 \times 2$ | 10 |
| 2. Läuten | vier Blumengelbtöne: $4 \times 3$ | 12 |
| 3. Läuten | karmesinrot: $1 \times 4$ | 4 |
| 4. Läuten | kaktusgrün: $1 \times 5$ | 5 |
| 5. Läuten | aquamarinblau: $1 \times 6$ | 6 |
| 6. Läuten | goldorange: $1 \times 7$ | 7 |
| 7. Läuten | bernsteinbraun: $1 \times 8$ | 8 |
| 8. Läuten | muschelgrau: $1 \times 9$ | 9 |
| 9. Läuten | niemand: $0 \times 10$ | - |
| 10. Läuten | niemand: $0 \times 11$ | - |
| 11. Läuten | niemand: $0 \times 12$ | - |
| 12. Läuten | niemand: $0 \times 13$ | - |
| 13. Läuten | weiß, schwarz: $2 \times 14$ | 28 |

Nach dem dreizehnten Läuten haben also genau 89 der insgesamt 126 Wichtel den Saal verlassen, sodass sich 37 Wichtel im Saal befinden. Da jede noch im Saal vorhandene Mützenfarbe mindestens 15 -mal auftreten muss, haben entweder alle 37 verbleibenden Wichtel die selbe Mützenfarbe oder es gibt zwei Mützenfarben für $15 + 22$ oder $16 + 21$ oder $17 + 20$ oder $18 + 19$ Wichtel. Da es insgesamt aber nur sieben Runden gibt, in denen niemand den Saal verlässt, kann die Tabelle nur auf folgende Art vervollständigt werden.

| Runde | Kommentar | Anzahl |
|---|---|---|
| 14. Läuten | niemand: $0 \times 15$ | - |
| 15. Läuten | niemand: $0 \times 16$ | - |
| 16. Läuten | niemand: $0 \times 17$ | - |
| 17. Läuten | sandsteinfarben: $1 \times 18$ | 18 |
| 18. Läuten | honigfarben: $1 \times 19$ | 19 |

Alles in allem gibt es daher genau $N = 18$ Runden. Somit ist Antwort #2 korrekt.

# 2014 Bartverlust

Aufgabensteller: Max von Kleist (FU Berlin)

## Aufgabe

Sieben Tage bis Weihnachten und der Weihnachtsmann hat plötzlichen Bartausfall bekommen. Von seinem prachtvollen Bart, bestehend aus 999 Barthaaren, ist bloß noch ein einziges Barthaar übrig. So kann der Weihnachtsmann nicht auftreten! Am Nordpol ist die Hölle los! -Was tun? Bei *normalem Bartwuchs* würden 3 Barthaare pro Tag neuwachsen, aber das wird nicht reichen, um am Weihnachtstag wieder 999 Barthaare zu haben.
Zum Glück hat einer der Weihnachtswichtel dubiose Kontakte und konnte ein bisher nichterprobtes Zaubermittel beschaffen. Laut Packungsbeilage unterdrückt das Zaubermittel zwar den *normalen Bartwuchs*, verdreifacht aber gleichzeitig die Anzahl der existierenden Barthaare bei jedem Einsatz. Es ist außerdem zu beachten, dass das Mittel nicht öfter als einmal pro Tag genommen werden darf, sonst besteht die Gefahr, sich in einen Osterhasen zu verwandeln! Es ist also wichtig, das Mittel präzise einzusetzen, damit der Weihnachtsmann nicht entstellt wird (zu wenige/zu viele Barthaare oder Osterhase). Damit Weihnachten wie gewohnt gefeiert werden kann, müssen die Wichtel nun den perfekten Behandlungsplan ausarbeiten: An welchen Tagen muss der Weihnachtsmann das Zaubermittel einsetzen, um an Weihnachten (in 7 Tagen) einen prachtvollen Bart mit genau 999 Haaren präsentieren zu können?

**Antwortmöglichkeiten:**

1. Es gibt keine Lösung. Der Weihnachtsmann sollte sich durch Überdosierung in einen Osterhasen verwandeln und Schokolade verstecken.
2. Der Weihnachtsmann sollte das Zaubermittel täglich einnehmen.
3. Der Weihnachtsmann sollte das Zaubermittel ab dem vierten Tag einnehmen.
4. Der Weihnachtsmann sollte das Zaubermittel ab dem dritten Tag einnehmen.
5. Der Weihnachtsmann sollte das Zaubermittel an allen Tagen einnehmen, außer dem Ersten und dem Letzten.
6. Der Weihnachtsmann sollte das Zaubermittel mit dem zweiten Tag beginnend an jedem zweiten Tag einnehmen.
7. Der Weihnachtsmann sollte das Zaubermittel mit dem ersten Tag beginnend an jedem zweiten Tag einnehmen.
8. Der Weihnachtsmann sollte das Zaubermittel am 1., 3., 5., 6. und 7. Tag einnehmen.
9. Der Weihnachtsmann sollte das Zaubermittel am 2., 3., 4., 6. und 7. Tag einnehmen.
10. Der Weihnachtsmann sollte das Zaubermittel am 2., 3., 4., 5., 6. und 7. Tag einnehmen.

### Projektbezug:

Das Problem beschreibt ein Optimalsteuerungsproblem (optimal control problem), genauer gesagt ein geschaltetes System (switched system). Optimalsteuerungprobleme finden in allen Ingenieurwissenschaften Anwendung; zum Beispiel zum Steuern sogenannter autonomer Systeme, für Internetprotokolle, etc.... In der Arbeitsgruppe "Systems Pharmacology & Disease Control" entwickeln wir u.a. Methoden, um optimale Behandlungsstrategien berechnen zu können. Dabei sind die zu lösenden Systeme meist so groß, dass nicht mehr alle möglichen Lösungen berechnet werden können. Die numerischen Methoden helfen u.a. dabei den Suchraum der möglichen Lösungen zu beschränken. Ein Mittel gegen Haarausfall haben wir noch nicht gefunden, aber wir arbeiten daran :).

## Lösung

### Richtige Antwort: 9

Der Weihnachtsmann muss das Mittel an Tag 2, 3, 4, 6 & 7 nehmen. Einfaches Ausrechnen genügt. Folgende Vorschriften gelten:

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k + 3 & \text{, wenn kein Mittel genommen wird} \\ x_k \cdot 3 & \text{, wenn das Mittel genommen wird} \end{cases}$$

wobei $x_k$ die Anzahl der Barthaare zum Zeitpunkt $k$ beschreibt, mit der Anfangsbedingung $x_0 = 1$ für $k = 0$.
In dem Beispiel gibt es theoretisch $2^7 = 128$ mögliche Lösungen. Man könnte alle möglichen

Lösungen bestimmen und die Richtige auswählen . Bei einem (erheblich) größeren Suchraum könnte man Verfahren verwenden, die den Suchraum eingrenzen. Dabei fängt man für gewöhnlich bei der zweiten Randbedingung an, nämlich dem Endzustand $x_N = 999$ (wobei $N = 7$ ). Mit den Übergangsregeln

$$x_{k-1} = \begin{cases} x_k - 3 & \text{, wenn kein Mittel genommen wird} \\ x_k/3 & \text{, wenn das Mittel genommen wird} \end{cases}$$

ist dies in unserem Fall:

$$999/3 \Rightarrow 333/3 \Rightarrow 111 - 3 \Rightarrow 108/3 \Rightarrow 36/3 \Rightarrow 12/3 \Rightarrow 4 - 3 \Rightarrow 1$$

Allgemein löst man das Problem für $N - 1$, indem man mittels eines linearen Programs überprüft, ob die letzte Entscheidung, z.B. kein Zaubermittel zu nehmen, zu einer optimalen Lösung gehören kann. Das Ganze iteriert man (am Computer) durch, für jede mögliche Steuerung (Einnahme/nichtEinnahme), bis man zum Anfangszustand kommt.

# 2015 Schneeflocke

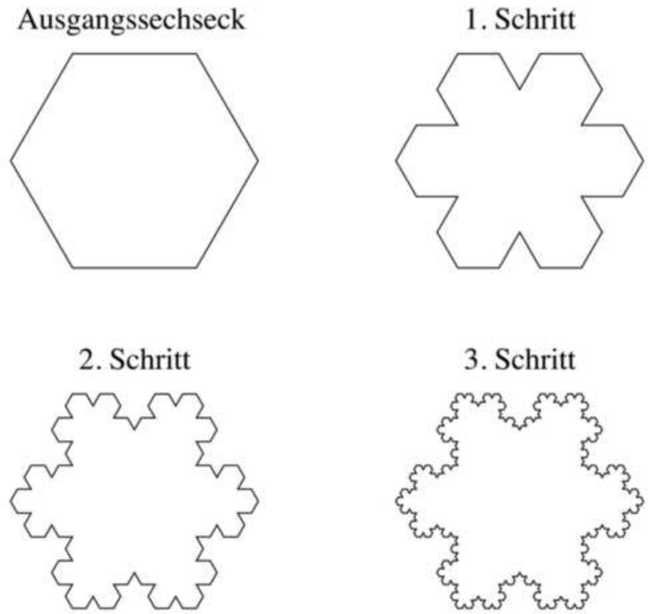
Autor: Oleh Omelchenko (Weierstraß Institut)

## Aufgabe

Um die Fläche eines sechseckigen Schmuckstückes für den Tannenbaum vollständig zu bemalen, brauchen Elfen genau sechs Tuben mit goldener Farbe. Aber welch Schreck! Diesmal ging eine Tube verloren und die Elfen wissen nicht, was sie tun sollen. Ein Elf schlägt vor, aus dem Sechseck eine sch¨one Schneeflocke zu machen. Dafür macht er Folgendes: Er schneidet an jeder Seite des Sechseckes genau in der Mitte ein kleines gleichseitiges Dreieck aus. Die Seiten der Dreiecke sind so lang wie ein Drittel einer Seite beim Ausgangssechseck. So bekommt er eine neue Figur, die auch gleichlange Seiten hat. Diese Figur ist im 1. Schritt der Abbildung zu sehen. Dann wiederholt er das Verfahren in analoger Weise und schneidet an jeder Seite der Figur noch ein kleineres Dreieck aus, welches ein Drittel der aktuellen Seitenlänge hat. Diese Figur ist im 2. Schritt der Abbildung zu sehen.
Wie viele Male muss der Elf dieses Verfahren mindestens durchführen, um am Ende mit seinen verbliebenen fünf Farbtuben eine Schneeflocke vollständig bemalen zu können?

**Antwortmöglichkeiten:**

1. Es reicht, nur den 1 . Schritt zu machen
2. Der Elf muss bis zum 2. Schritt gehen
3. Der Elf muss bis zum 3. Schritt gehen
4. Der Elf muss bis zum 4. Schritt gehen
5. Der Elf muss bis zum 5. Schritt gehen




6. Der Elf muss bis zum 6. Schritt gehen
7. Der Elf muss bis zum 7. Schritt gehen
8. Der Elf muss bis zum 8. Schritt gehen
9. Der Elf muss bis zum 9. Schritt gehen
10. Der Elf muss unendlich viele Schnitte machen

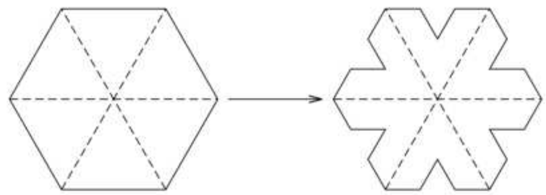
### Projektbezug:

Wenn wir das oben beschriebene Verfahren unendlich viele Male wiederholen, bekommen wir eine seltsame Figur, die man ein *Fraktal* nennt. Ihre besonderen Eigenschaften sind ein hoher Grad der Selbstähnlichkeit und, was sehr erstaunlich ist, unendliche Grenzenlänge trotz einer endlichen Fläche. In der Mathematik trifft man fraktale Gebilde im Studium von dynamischen Systemen, die ein komplexes Verhalten, sogenannte *seltsame Attraktoren*, erzeugen. Aber Fraktale findet man auch in der Natur. Typische Beispiele aus der Biologie sind die fraktalen Strukturen bei der Züchtung des grünen Blumenkohls Romanesco und bei den Farnen. Eine große Ähnlichkeit mit Fraktalen zeigen auch Küstenlinien und die Trajektorien von der brownschen Molekularbewegung.

## Lösung

### Richtige Antwort: 3

Um die richtige Antwort zu finden, müssen wir zuerst die Fläche der Schneeflocke in jedem Schritt berechnen. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass die Fläche vom Ausgangssechseck gleich 1 ist. Dann rechnen wir wie groß die Stücke sind, die der Elf im ersten Schritt ausschneidet. Zu diesem Zweck ist es praktisch das Ausgangssechseck in sechs gleichseitige Dreiecke aufzuteilen.



Im ersten Schritt verliert jedes Dreieck einen Teil der auch ein gleichseitiges Dreieck ist aber mit 3 mal kürzerer Seitenlänge. Das bedeutet, dass die Fläche von einem ausgeschnittenen Dreieck 9 mal kleiner ist als die Fläche vom Ausgangsdreieck. Deswegen bekommt der Elf nach dem ersten Schritt eine Schneeflocke mit der Fläche

$$S_1 = 1 - \frac{1}{9}.$$

Im zweiten Schritt muss der Elf noch kleinere Dreiecke ausschneiden, die 9 mal kleinere Flächen als im ersten Schritt haben. Jetzt hat die Schneeflocke aber 4 mal mehr Seiten. Deshalb verändert sich die Fläche nach dem zweiten Schritt wie folgt

$$S_2 = S_1 - 4 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}.$$

Man sieht, dass der Elf jedes Mal neue Dreiecke ausschneiden muss, die 9 mal kleiner als zuvor sind und dass die Zahl der Dreiecke im Vergleich zum vorherigen Schritt um 4 steigt . Nach dieser Regel können wir eine Formel für die Schneeflockenfläche nach dem $n$-ten Schritt schreiben

$$S_n = 1 - \frac{1}{9} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

Die Summe auf der rechten Seite nennt man geometrische Reihe und es gibt einen einfachen Weg sie zu berechnen

$$\left(1 - \frac{4}{9}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^k = 1 - \frac{4}{9} + \frac{4}{9} - \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 - \cdots - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{4}{9}\right)^n = 1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

So bekommen wir

$$S_n = 1 - \frac{1}{9} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = 1 - \frac{1}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Dem Elf fehlt eine von sechs Farbtuben. Deshalb muss er so lange Dreiecke ausschneiden bis $S_n > 5/6$ bleibt. Diese Bedingung kann man auch anders formulieren

$$\left(\frac{4}{9}\right)^n > \frac{1}{6}.$$

Jetzt rechnen wir

$$\left(\frac{4}{9}\right)^1 > \frac{1}{6}, \quad \left(\frac{4}{9}\right)^2 > \frac{1}{6}, \quad \text{aber} \quad \left(\frac{4}{9}\right)^3 < \frac{1}{6}.$$

Nach dem dritten Schritt reichen die fünf verbliebenen Farbtuben aus, um die ganze Figur zu bemalen.

## 2016 Weihnachtskrimi

Autor: Axel Flinth
Projekt: AG Kutyniok

### Aufgabe

In der arbeitsintensiven Adventszeit ließen die Rentiere des Weihnachtsmannes den Abend gern mit einem Glas Glühwein gemütlich ausklingen. Dementsprechend haben sie ein riesiges Lager, in dem sie jede Menge des süßen Getränks lagerten.

Eines Nachts beobachteten die Rentiere, wie zwei - und zwar genau zwei - Weihnachtsmannelfen etwas aus dem Lager stahlen. Als der Weihnachtsmann davon erfuhr, leitete er sofort eine Ermittlung zur Klärung des Straftatbestandes ein. Schnell konnte er eine kleine Gruppe von Elfen ermitteln, zu der die Diebe sicher gehörten.

Die Elfen dieser Gruppe waren aber sehr gute Freunde und wollten nicht, dass der Weihnachtsmann herausfand, wer die Straftat begangen hatte. Ihnen wäre es am liebsten, der Weihnachtsmann erführe gar nicht, wer wie viel gestohlen hat. Jedoch ist der Weihnachtsmann nach dem Weihnachtsrecht verpflichtet, diese Untersuchung durchzuführen und die Elfen zu dem Diebstahl zu befragen. Und ein Gesetz besagt, dass Elfen nicht lügen dürfen.

Um es dem Weihnachtsmann aber so schwer wie möglich zu machen, überlegen die Elfen sich Folgendes: Der Weihnachtsmann ist zwar berechtigt, die Elfen zu befragen, aber es ist im Weihnachtsrecht nicht festgelegt, auf welche Art und Weise genau dies geschehen soll. Die Elfen werden daher nur in Paaren antworten und zwar nur wie viel sie gemeinsam stahlen. Da die Elfen in der Adventszeit auch viel zu tun haben, musste der Weihnachtsmann ferner einen Tag vorher festlegen, welche Paare er zu fragen beabsichtige, damit die Elfen die Verhöre in ihren Tagesabläufen sinnvoll einplanen konnten. Er durfte also die Wahl der Paare nicht von den Antworten abhängig machen, die er schon bekommen hatte. Der Weihnachtsmann überlegt sich einen guten strategischen Plan für die drei Fälle, dass die Gruppe der verdächtigen Elfen aus i) genau drei, ii) genau vier und iii) genau fünf Elfen besteht.

Daraus ergibt sich folgende Frage:
Untersuchen Sie für alle drei Fälle, wie viel Fragen der Weihnachtsmann mindestens stellen muss, um sicher herauszufinden, wer wie viel gestohlen hat. (Letzteres ist wichtig, um die Schulden an die Rentiere gerecht zurück zu zahlen.)
Das Ergebnis $A$ ist der folgenden Form gegeben $A = \big(\text{Fall i), Fall ii), Fall iii)}\big)$.


**Antwortmöglichkeiten:**

1. $A = (1, 2, 3)$
2. $A = (1, 2, 4)$
3. $A = (2, 2, 3)$
4. $A = (2, 3, 4)$
5. $A = (2, 3, 5)$
6. $A = (2, 4, 5)$
7. $A = (3, 3, 4)$
8. $A = (3, 4, 5)$
9. $A = (3, 4, 6)$
10. $A = (4, 5, 5)$

## Projektbezug:

In vielen Anwendungen der Mathematik sind oft Lösungen von Gleichungssystemen, in denen nur wenige der beteiligten Variablen ungleich null sind (d.h. dünn besetzt bzw. *sparse*), von besonderer Bedeutung. Solche Lösungen lassen sich in der Tat oft mit deutlich weniger Gleichungen ermitteln als allgemeine Lösungen - das ist die Hauptbotschaft der sogenannten *Compressed Sensing*-Theorie. Bemerkungen:

## Lösung

**Richtige Antwort: 7**: Die Anzahl der Fragen, die der Weihnachtsmann stellen muss, ist für die drei Fälle: $A = (3, 3, 4)$.

Zuerst bemerken wir, dass wir jeden Elf mindestens einmal („eingebettet in einem Paar") fragen müssen. Anderenfalls ist die Information, die der Weihnachtsmann erhält, komplett unabhängig von den Elfen, die nicht befragt wurden. Nun betrachten wir die Lösungen für die drei Fälle, in denen drei, vier, bzw. fünf Elfen unter Verdacht stehen.

**Fall 1: Drei Elfen.** Wenn wir nur ein Paar auswählen, können wir nicht alle Elfen fragen. Nur ein Paar zu befragen ist damit ausgeschlossen. Zwei Paare sind damit auch nicht genug: Nennen wir die Paare, die wir befragen $(A, B)$ und $(B, C)$ - man beachte, dass die Paare in jedem Fall einen Elf gemeinsam haben müssen -, dann werden die beiden Konfigurationen „$A$ stiehlt 0, B stiehlt 2 und $C$ stiehlt 1“ und „$A$ stiehlt 2, $B$ stiehlt 0 und $C$ stiehlt 3“ (die beide möglich sind) die gleichen „Messungen"verursachen. Drei Paare sind aber genug: Wählen wir $(A, B), (A, C)$ und $(B, C)$, so erhalten wir in jedem Fall ein lineares Gleichungssystem, das eindeutig lösbar ist - dementsprechend können wir die gestohlenen Mengen rekonstruieren.

**Fall 2: Vier Elfen.** Ein Paar reicht wieder, wie oben, nicht aus. Zwei Paare können wir in diesem Fall wie folgt ausschließen: Wenn das erste Paar, das befragt wird, $(A, B)$ ist, muss das zweite Paar $(C, D)$ sein, denn sonst wird $D$ nie befragt. Dann werden wir aber für jedes Paar nur Kenntnis über die Summe der gestohlenen Mengen erhalten, woraus wir nie die genauen Mengen für jeden einzelnen Elf rekonstruieren können.

Wir müssen also mindestens drei Paare befragen; das ist jedoch ausreichend: Die Strategie $(A, B), (A, C)$ und $(A, D)$ wird immer erfolgreich sein. Das sieht man wie folgt: Wenn A nichts gestohlen hat, muss mindestens eine der Summen gleich null sein. Wenn also alle Messungen ungleich null sind, können wir schließen, dass $A$ schuldig ist. Wenn wir anschließend untersuchen, welche von den drei Summen sich von den anderen beiden unterscheiden, können wir ermitteln, wer der andere Schuldige ist, und danach auch die genauen gestohlenen Mengen ausrechnen.

Wenn aber eine Summe gleich null ist, können wir sofort schließen, dass beide Elfen in dem entsprechenden Paar unschuldig sind. Die anderen sind damit schuldig und wir können direkt ablesen, wie viel sie jeweils gestohlen haben (denn $A$ hat ja nichts gestohlen in diesem Fall).

**Fall 3: Fünf Elfen.** Hier können sowohl ein Paar als auch zwei Paare mit dem „nicht alle befragt haben Argument ausgeschlossen werden. Auch drei Paare sind nicht genug: Da wir alle Elfen befragen müssen, werden, bis auf Permutationen, die Paare $(A, B), (C, D)$ und $(A, E)$ erhalten. Für den Fall, dass nur die mittlere von diesen Messungen ungleich null ist, können wir nie zurückrechnen, welchen Wert $C$ und $D$ jeweils gestohlen haben.

Vier Paare sind aber genug: $(A, B), (A, C), (A, D)$ und $(A, E)$ funktioniert. Das Argument ist ähnlich zu der obigen Situation: Wenn alle Summen ungleich null sind, muss A schuldig sein und wir können durch Vergleiche ermitteln, wer der andere Schuldige ist. In dem Fall, dass es eine Nullmessung gibt, ist A unschuldig, was impliziert, dass wir die Schuldigen und deren jeweils gestohlenen Mengen einfach ablesen können aus den von null verschiedenen Messungen.

Die richtige Antwort ist also: $(7) : \mathrm{A} = (3, 3, 4)$.

## 2017 Konzert

Autor: Onno Boxma (TU Eindhoven)

### Aufgabe

Heute Abend besuchen 26 Zwerge das Weihnachtskonzert. Sie haben Tickets für die 26 Plätze in der ersten Reihe, die mit den Nummern 1, 2, . . . , 26 nummeriert sind. Jeder Zwerg hat die Nummer seines Platzes auf seinem Eintrittsticket stehen. Die Zwerge betreten den Konzertsaal in alphabetischer Reihenfolge: zuerst Atto, dann Bilbo, dann Chico, dann Dondo und so weiter, wobei Ziggo der Letzte ist.

Atto hat sein Ticket verloren und nimmt völlig zufällig (genauer gesagt: gleichverteilt) einen Platz in der ersten Reihe ein. Bilbo, Chico und Dondo haben ebenfalls ihre Tickets verloren und nehmen zufällig einen der verbleibenden freien Plätze. Die nächsten 22 Zwerge haben ihre Tickets noch und verhalten sich wie folgt: Zuerst gehen sie zu dem Platz, für den sie ein Ticket haben. Ist dieser Platz noch frei, nehmen sie ihn; ist er jedoch bereits besetzt, nehmen sie zufällig einen der übrigen freien Plätze in der ersten Reihe.

Sei $p$ die Wahrscheinlichkeit, dass Ziggo den Platz bekommt, für den er ein Ticket hat. Welche der folgenden Aussagen über $p$ ist korrekt?


**Antwortmöglichkeiten:**

1. $p \leq 0{,}002$
2. $0{,}002 < p \leq 0{,}004$
3. $0{,}004 < p \leq 0{,}008$
4. $0{,}008 < p \leq 0{,}016$
5. $0{,}016 < p \leq 0{,}032$
6. $0{,}032 < p \leq 0{,}064$
7. $0{,}064 < p \leq 0{,}128$
8. $0{,}128 < p \leq 0{,}256$
9. $0{,}256 < p \leq 0{,}512$
10. $0{,}512 < p$

## Lösung

**Richtige Antwort: 8**

Wir zeigen zwei mögliche Lösungswege.

**Erster Ansatz:** Bezeichne die Sitzplatznummern von Atto, Bilbo, Chico, Dondo und Ziggo mit $A$, $B$, $C$, $D$, und $Z$. Wir machen zwei Beobachtungen:

- Ziggo kann nur auf einem der fünf Plätze $A$, $B$, $C$, $D$ oder $Z$ sitzen. Jeder andere Platz wird spätestens von der Person eingenommen, die die entsprechende Sitzplatznummer hat.

- Wenn einer der ersten 25 Zwerge zufällig einen Platz wählt, unterscheidet seine Entscheidung nicht zwischen den fünf Plätzen $A$, $B$, $C$, $D$ und $Z$.

Daraus folgt, dass Ziggo zufällig einen der fünf Plätze $A$, $B$, $C$, $D$ oder $Z$ bekommt. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ziggo seinen eigenen Platz bekommt, $p = 1/5$.

**Zweiter Ansatz:** Wir verallgemeinern das Problem auf $n = 26$ Zwerge und betrachten eine beliebige Anzahl $n \geq 5$ Zwerge. Die ersten vier Zwerge nehmen zufällig einen Platz ein, wie zuvor, und die verbleibenden $n - 4$ Zwerge verhalten sich wie oben beschrieben. Sei $P(n)$ die Wahrscheinlichkeit, dass der letzte Zwerg seinen eigenen Platz bekommt. Es ist leicht zu sehen, dass $P(5) = \frac{1}{5}$ gilt: Die ersten vier Zwerge besetzen zufällig vier Plätze, und der fünfte Zwerg hat die gleichen Wahrscheinlichkeiten 1/5, auf einem der fünf Plätze zu sitzen.
Nun sei $n \geq 6$. Betrachte den Moment, in dem Espo, der fünfte Zwerg, den Konzertsaal betritt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Im ersten Fall ist Espos Platz frei. Er nimmt ihn ein und spielt keine weitere Rolle im weiteren Verlauf. Wir können Espo und seinen Platz aus der Geschichte entfernen, was die Situation auf $n - 1$ Zwerge reduziert. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass der letzte Zwerg seinen eigenen Platz bekommt, $P(n - 1)$.

- Im zweiten Fall ist Espos Platz von einem der ersten vier Zwerge besetzt – sagen wir, von Atto. Nun sind fünf Plätze besetzt: Espos und vier zufällige Plätze. Wir können nun Atto und Espo die Plätze tauschen lassen und Espo und seinen Platz erneut entfernen. Das reduziert das Problem auf eine Situation, in der die ersten vier Zwerge zufällig Plätze aus einer Menge von $n-1$ Plätzen genommen haben, und $P(n-1)$ ist wieder die Wahrscheinlichkeit, dass der letzte Zwerg seinen eigenen Platz bekommt.

Der erste Fall tritt mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit $q$ auf, der zweite mit Wahrscheinlichkeit $1 - q$. Daher gilt:

$$P(n) = qP(n - 1) + (1 - q)P(n - 1) = P(n - 1).$$

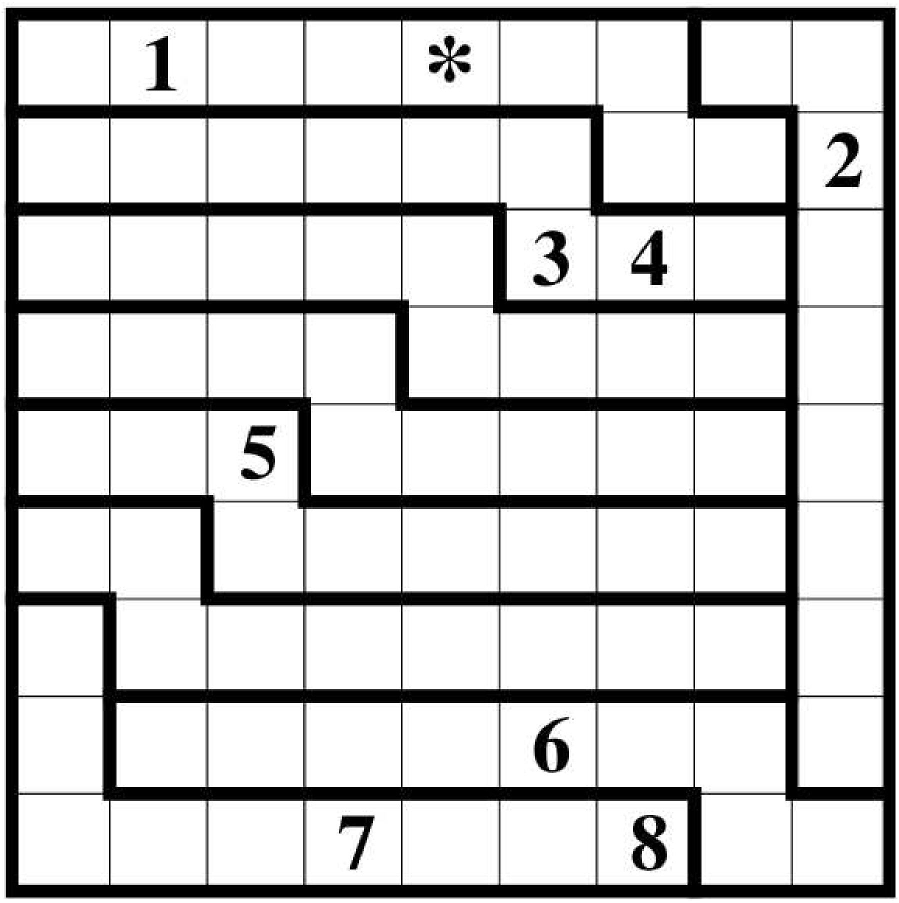
Durch Induktion schließen wir, dass $P(n) = P(5)$ für alle $n \geq 5$ gilt.

## 2018 Kudosu

Autor: Cor Hurkens (TU Eindhoven)

### Aufgabe

Kudosu ist eine Variante des bekannten Sudoku-Rätsels. Die 81 Zellen im folgenden $9 \times 9$ Schema sollen mit den Ziffern $1, 2, \ldots, 9$ gefüllt werden, sodass jede Zeile und jede Spalte jede der neun Ziffern genau einmal enthält. Weiters soll auch jedes der neun eingezeichneten Gebiete jede der neun Ziffern genau einmal enthalten.




Wir wollen von Euch wissen: Welche Ziffer kommt in die Zelle mit dem Stern?

Illustration: Friederike Hofmann

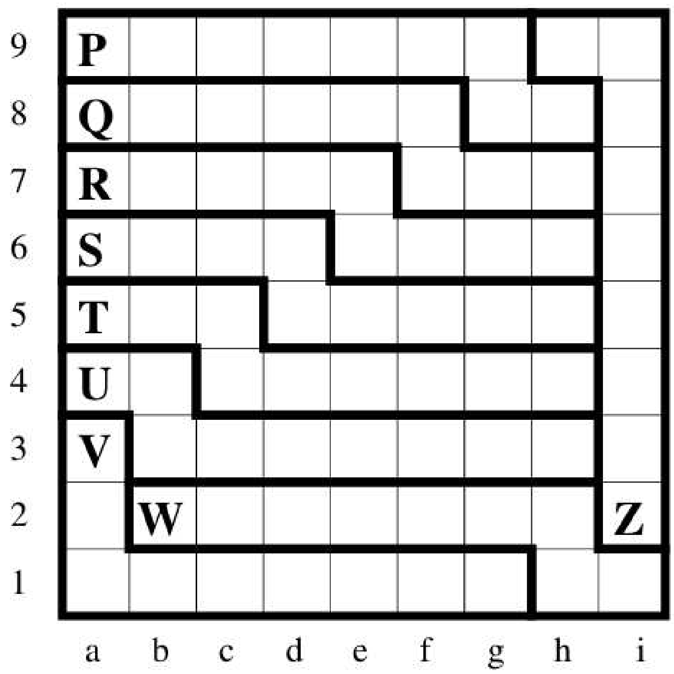
**Antwortmöglichkeiten:**

1. In die Zelle mit dem Stern kommt die Ziffer 1.
2. In die Zelle mit dem Stern kommt die Ziffer 2.
3. In die Zelle mit dem Stern kommt die Ziffer 3.
4. In die Zelle mit dem Stern kommt die Ziffer 4.
5. In die Zelle mit dem Stern kommt die Ziffer 5.
6. In die Zelle mit dem Stern kommt die Ziffer 6.
7. In die Zelle mit dem Stern kommt die Ziffer 7.
8. In die Zelle mit dem Stern kommt die Ziffer 8.
9. In die Zelle mit dem Stern kommt die Ziffer 9.
10. Der Inhalt der Zelle mit dem Stern ist nicht eindeutig festgelegt.

## Lösung

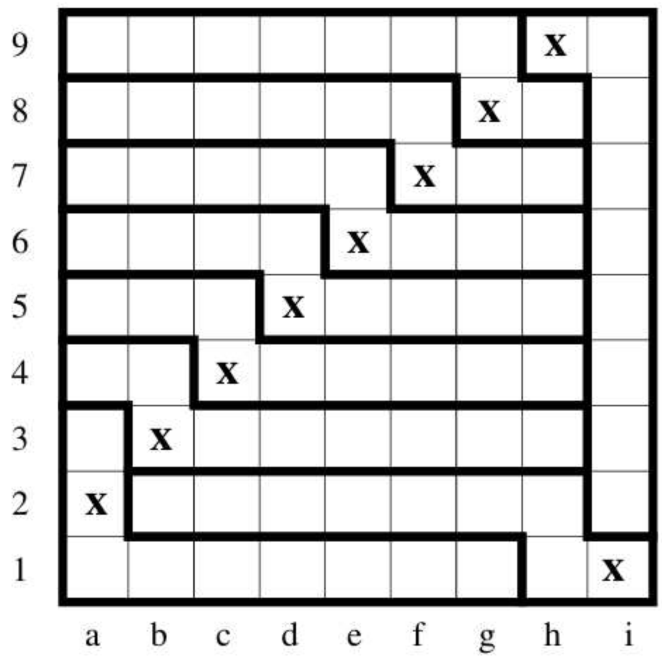
### Richtige Antwort: 9

Wir nummerieren die Zeilen mit 1 bis 9 und die Spalten mit $a$ bis $i$ durch und benennen die neun Gebiete mit $P, Q, R, S, T, U, V, W, Z$ wie in der folgenden Abbildung:

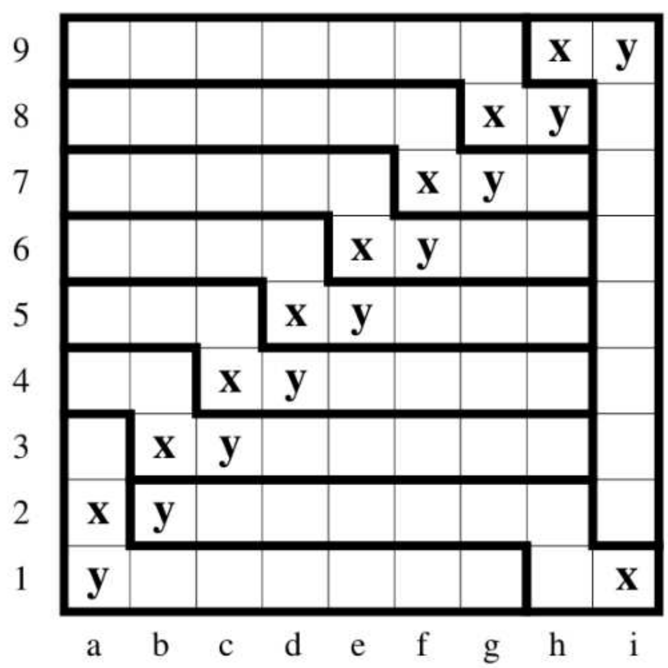



Nun betrachten wir den Eintrag $x$ in der Zelle $i1$ (die zum Gebiet $W$ gehört). Dieser Eintrag muss auch im Gebiet $Z$ vorkommen; da $x$ in der Spalte $i$ aber nur einmal auftritt, muss die Zelle $h9$ diesen Eintrag $x$ enthalten. Der Eintrag $x$ muss auch im Gebiet $P$ vorkommen; man sieht leicht, dass dafür nur die Zelle $g8$ in Frage kommt. Anschließend kann man diagonal analog fortfahren:

- Im Gebiet $Q$ ist Eintrag $x$ in der Zelle $f7$,
- im Gebiet $R$ in der Zelle $e6$,
- im Gebiet $S$ in der Zelle $d5$,
- im Gebiet $T$ in der Zelle $c4$,
- im Gebiet $U$ in der Zelle b3, und
- im Gebiet $V$ in der Zelle $a2$ :



Als nächstes betrachten wir den Eintrag $y$ in der Zelle $i9$. Dieser Eintrag muss auch im Gebiet $P$ vorkommen, und dafür kommt nur die Zelle h8 in Frage. Durch ähnliche Argumentation sieht man, dass die sieben Zellen $g7$, $f6, e5, d4, c3, b2, a1$ ebenfalls den Eintrag $y$ enthalten:



Analoge Argumente entlang anderer Diagonalen zeigen, dass jeder Eintrag mit dem Eintrag unmittelbar rechts darüber übereinstimmen muss. Damit erhält man die folgende eindeutige Lösung des Kudosu-Rätsels:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | **2** | **1** | **7** | **6** | **9** | **8** | **5** | **3** | **4** |
| 8 | **1** | **7** | **6** | **9** | **8** | **5** | **3** | **4** | **2** |
| 7 | **7** | **6** | **9** | **8** | **5** | **3** | **4** | **2** | **1** |
| 6 | **6** | **9** | **8** | **5** | **3** | **4** | **2** | **1** | **7** |
| 5 | **9** | **8** | **5** | **3** | **4** | **2** | **1** | **7** | **6** |
| 4 | **8** | **5** | **3** | **4** | **2** | **1** | **7** | **6** | **9** |
| 3 | **5** | **3** | **4** | **2** | **1** | **7** | **6** | **9** | **8** |
| 2 | **3** | **4** | **2** | **1** | **7** | **6** | **9** | **8** | **5** |
| 1 | **4** | **2** | **1** | **7** | **6** | **9** | **8** | **5** | **3** |
| | a | b | c | d | e | f | g | h | i |

## 2019 Lebkuchen richtig packen

Autor: Falk Ebert (Herder-Gymnasium Berlin)

### Aufgabe

In der Weihnachtsbäckerei „Tasty Pastry“ am Nordpol riecht es köstlich, wo die besten Lebkuchen, Plätzchen und Christstollen der Welt gebacken werden.

Packelf Paul hat die Aufgabe, die köstlichsten Lebkuchen (die fast quaderförmig sind, 5 cm breit und 15 cm lang[4]) in große Kisten zu packen. Jede der normierten Kisten ist 40 cm breit und 40 cm lang. Paul packt immer mehrere Lagen Lebkuchen mit Backpapier zwischen den Lagen. Es liegt an ihm zu entscheiden, wie die Lebkuchen in jeder Lage angeordnet werden. Allerdings ist es Paul eine Ehre, die Lebkuchen so effizient wie möglich zu packen, d.h. so, dass es keine andere Anordnung gibt, die mehr Lebkuchen fasst.

Schnell bemerkt er eine Tatsache: In jeder Lebkuchenlage bleibt immer ein kleiner leerer Raum übrig, den er unabhängig davon, wie er die Lebkuchen anordnet, nicht füllen kann. Nachdem er mehrere Kisten gepackt hat, stellt er fest, dass bei der effizientesten Packweise dieses Phänomen in jeder Lage auftritt.

Welches Phänomen bemerkt Paul?

Artwork: Frauke Jansen

**Antwortmöglichkeiten:**

[4]Da die Höhe der Lebkuchen für die Lösung nicht von Bedeutung ist, wird sie hier nicht angegeben.

1. Es gibt genau eine mögliche Position für die leere Region.
2. Es gibt genau vier mögliche Positionen für die leere Region.
3. Es gibt genau acht mögliche Positionen für die leere Region.
4. Es gibt genau 16 mögliche Positionen für die leere Region.
5. Es gibt genau 64 mögliche Positionen für die leere Region.
6. Der leere Raum berührt immer den Rand der Kiste.
7. Es gibt immer einen Lebkuchen-langen Abstand (15 cm) zwischen der leeren Region und einer Seite der Kiste.
8. Die leere Region ist niemals verbunden.
9. Die leere Region hat immer eine quadratische Form mit einer Seitenlänge von 10 cm.
10. Die leere Region hat immer die Form eines **L**.

## Lösung

**Richtige Antwort: 2**
Wir können den Boden der Kiste in 64 kleine Quadrate der Größe 5 cm x 5 cm aufteilen. Die Lebkuchen können ebenfalls in drei kleine Quadrate der Größe 5 cm x 5 cm aufgeteilt werden (siehe Abbildung 8).

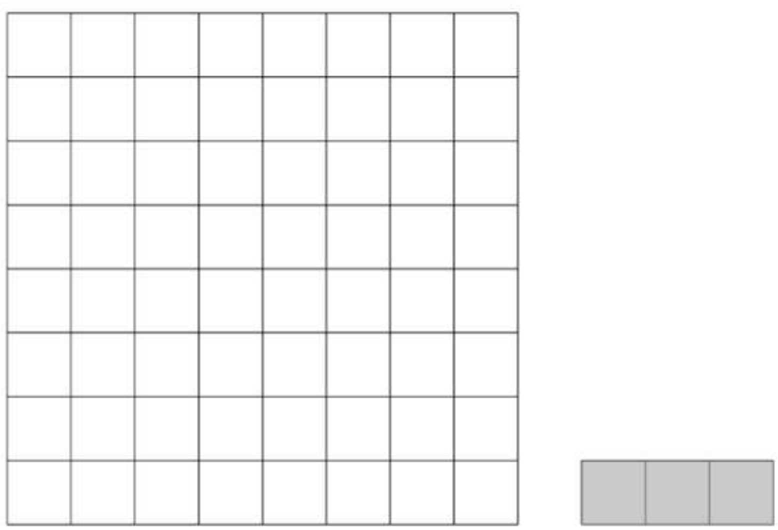


Abbildung 8: Links: Boden der Kiste. Rechts: ein Lebkuchen.

Wir bemerken sofort (wie Paul), dass 64 bei der Division durch 3 einen Rest von 1 ergibt, d.h. $64 = 21 \cdot 3 + 1$. Daher passen maximal 21 Lebkuchen in eine Lage. Ein Beispiel, wie dies erreicht werden kann, ist in Abbildung 9 gezeigt.

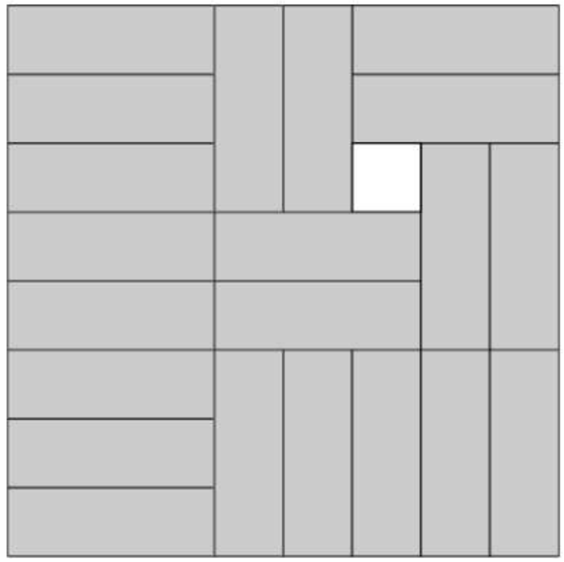


Abbildung 9: Eine Möglichkeit, 21 Lebkuchen in eine Lage zu packen.

Wir zeigen, dass es genau vier Möglichkeiten gibt, 21 Lebkuchen in die Kiste zu packen. Dazu färben wir den Boden der Kiste mit drei verschiedenen Farben, wie in Abbildung 10 gezeigt.

Wir stellen fest, dass ein Lebkuchen – unabhängig davon, wie er in der Kiste platziert wird (vertikal oder horizontal) – immer genau ein pinkes, ein blaues und ein gelbes Quadrat abdeckt. Insgesamt zählen wir 21 blaue, 21 gelbe und 22 pinke Quadrate. Daher bleibt bei einer Anordnung von 21 Lebkuchen in einer Lage immer ein pinkes Quadrat leer. Da das Packproblem sowohl spiegelsymmetrisch als auch rotationssymmetrisch ist, kommen nur diejenigen pinken Quadrate für das leere Feld in Frage, die bei Spiegelung oder Drehung (um 90°, 180° oder 270°) pink bleiben. Angenommen, das unterste linke, pinke Quadrat bleibt leer, so entspricht dies dem oberen linken, *gelben* Quadrat – aber diese Möglichkeit wurde bereits ausgeschlossen. Daher gibt es genau **vier Quadrate**, die bei der effizientesten Packweise leer bleiben können (siehe Abbildung 11). In Abbildung 9 sehen wir, dass es tatsächlich möglich ist, 21 Lebkuchen in die Kiste zu packen, sodass eines der vier pinken Quadrate leer bleibt.

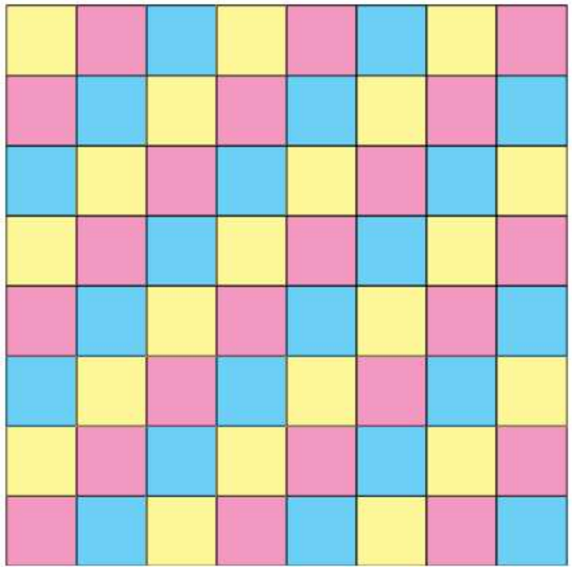


Abbildung 10: Färbung des Kistenbodens in drei verschiedene Farben.

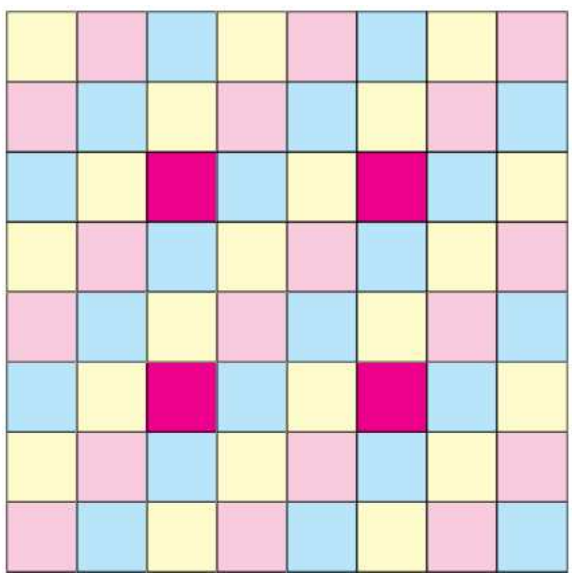


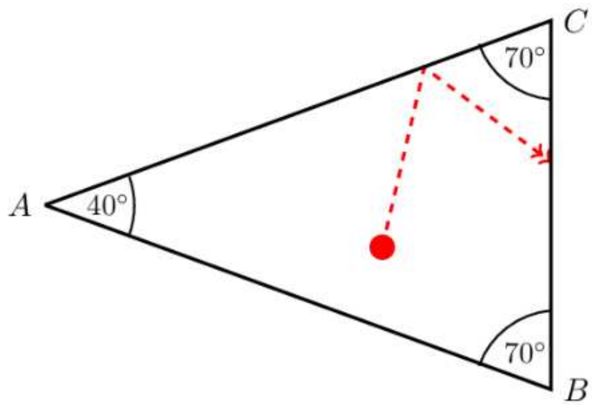
Abbildung 11: Die dunkelrosa Quadrate sind die einzigen möglichen Positionen für die leere Region.

# 2020 Billardtisch

Autor: Hennie ter Morsche (TU Eindhoven)
Projekt: 4TU.AMI

## Aufgabe

Im Aufenthaltsraum der Kobolde steht ein großer, dreieckiger Billardtisch. Der Winkel in der Ecke $A$ beträgt 40°, während die beiden Winkel bei $B$ und $C$ jeweils 70° betragen. Wenn der Ball eine der Banden $AB$ oder $AC$ trifft, wird er perfekt reflektiert, sodass der Reflexionswinkel dem Einfallswinkel entspricht. Trifft der Ball jedoch die klebrige Bande BC oder eine der drei Ecken $A$, $B$ oder $C$, bleibt er kleben und hört auf sich zu bewegen.




Zum Glück spielt Ruprecht mit einem punktförmigen Ball, der sich anfangs irgendwo im Inneren des Dreiecks befindet und sich nur entlang gerader Linien bewegt. Ruprecht möchte einen einzigen Stoß ausführen, der so viele Bandenkontakte wie möglich erzielt, bevor der Ball an einer Bande oder in einem Punkt stecken bleibt.

Was ist die größtmögliche Anzahl solcher Bandenkontakte?

Artwork: Julia Nurit Schönnagel

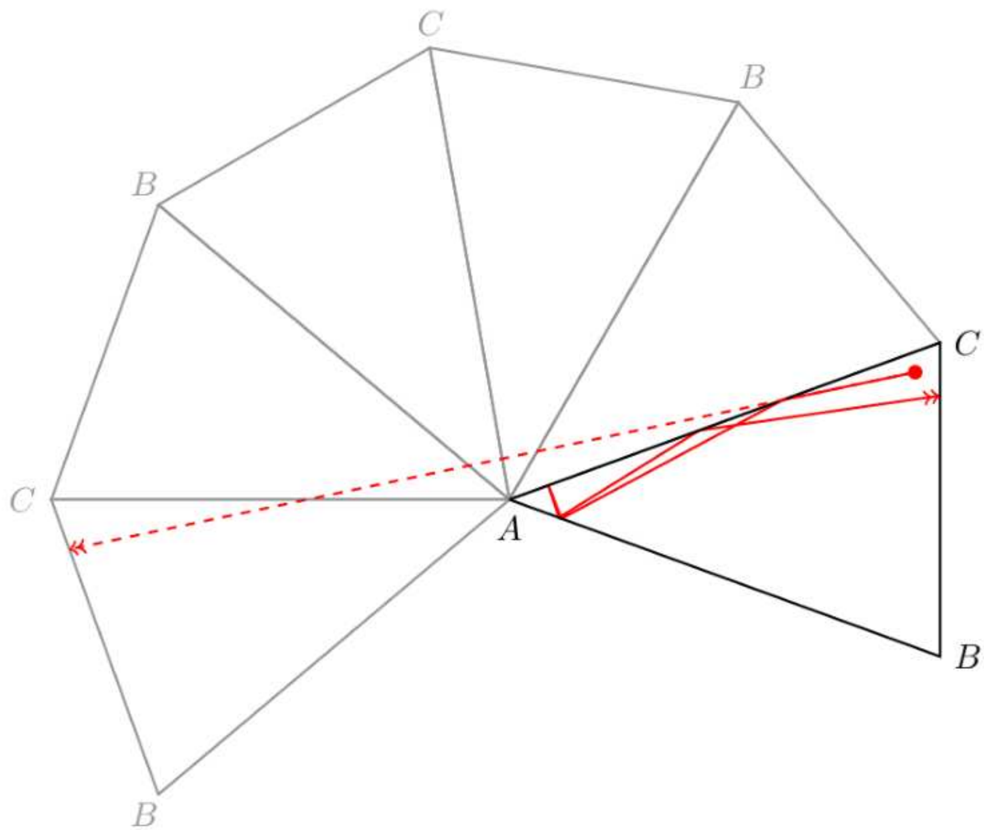
**Antwortmöglichkeiten:**

1. Die größtmögliche Anzahl von Bandenkontakten ist 4.
2. Die größtmögliche Anzahl von Bandenkontakten ist 5.
3. Die größtmögliche Anzahl von Bandenkontakten ist 6.
4. Die größtmögliche Anzahl von Bandenkontakten ist 7.
5. Die größtmögliche Anzahl von Bandenkontakten ist 8.
6. Die größtmögliche Anzahl von Bandenkontakten ist 12.
7. Die größtmögliche Anzahl von Bandenkontakten ist 16.
8. Die größtmögliche Anzahl von Bandenkontakten ist 24.
9. Ruprecht kann unendlich viele Bandenkontakte erzielen.
10. Die größtmögliche Anzahl von Bandenkontakten hängt von der Länge von $BC$ ab.

## Lösung

**Richtige Antwort: 2**
Da die dritte Bande $BC$ absorbierend ist, kann der Ball nur zwischen den beiden Banden $AB$ und $AC$ hin und her laufen. Da diese Konfiguration symmetrisch ist, können wir annehmen, dass der Ball zuerst $AC$, dann $AB$, dann wieder $AC$ usw. berührt.

Die folgende Abbildung zeigt den Billardtisch (rechts) zusammen mit fünf symmetrischen Kopien:




Da der Reflexionswinkel an den Banden $AB$ und $AC$ jeweils dem Einfallswinkel entspricht, entspricht die Bahn des Balls einer geraden Linie vom Startpunkt bis zum Punkt, an dem er absorbiert wird. Die gestrichelte Linie zeigt einen möglichen Pfad, der genau fünf Bandenkontakte ermöglicht. (Die durchgezogene Linie stellt die entsprechende Bewegung des Balls auf unserem Billardtisch dar.)

Die Bande $AC$ des ursprünglichen Dreiecks und die Bande $AB$ der fünften Kopie schließen einen Winkel von $5 \times 40° = 200°$ ein. Da dieser Winkel größer als $180°$ ist, kann man keine gerade Linie finden, die durch mehr als fünf Kopien des Dreiecks $ABC$ verläuft. Daher sind sechs (oder mehr) Bandenkontakte nicht möglich.

## 2021 Magische Bänder

Autoren: Myfanwy Evans (Uni Potsdam), Frank Lutz (TU Berlin)
Projekt: Thematisches Einstein-Semester 2021: Geometrische und topologische Struktur von Materialien

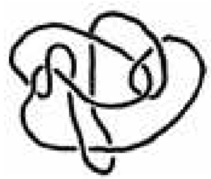
### Aufgabe

Weit, weit im Norden liegt die Heimat der Elfen. Wenn der Winter naht, helfen die Elfen Santa Claire beim Verpacken der Geschenke mit ihren magischen Bändern. Sphärische Klänge ertönen, wenn die Saiten berührt werden.

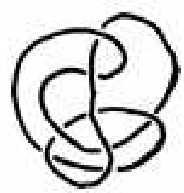
Im vergangenen Jahr standen die Elfen vor einer besonderen Herausforderung, als Santa Claire sie bat, einen Schokoladentorus zu verpacken. Sie schnitten eines ihrer Bänder auf, wickelten es um den Schokoladentorus und verwendeten Magie, um das Band wieder zusammenzukleben. Einer der Elfen bemerkte, dass das Band auf dem Torus verknotet wurde, vergaß dies aber bald wieder.

Jedes Jahr werden die magischen Bänder zu den Elfen zurückgebracht und zur Wiederverwendung für die nächste Saison gelagert. Das besondere Band landete in einer Tasche mit neun weiteren Bändern. Als die Elfen die Bänder für die diesjährigen Festlichkeiten herausholten, wirkten die Bänder etwas „verheddert“ und es dauerte eine Weile, neun davon zu entwirren. Erst dann erinnerten sie sich, dass eines der zehn Bänder besonders war.

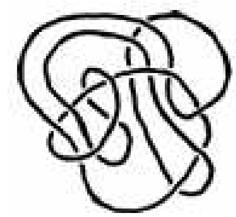
Welches ist das besondere Band, das letztes Jahr um den Schokoladentorus gewickelt war?



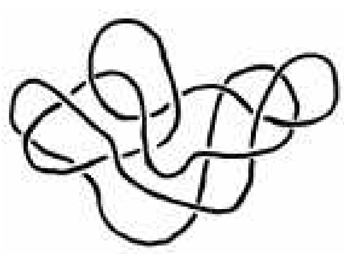
Ribbon no. 1.



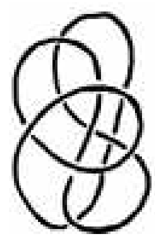
Ribbon no. 2.



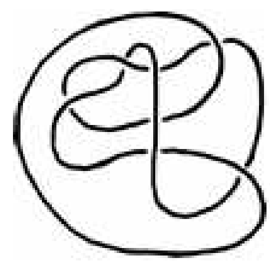
Ribbon no. 3.



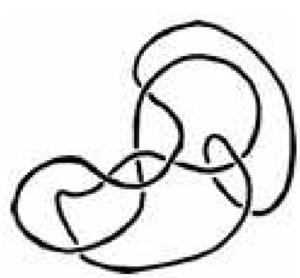
Ribbon no. 4.



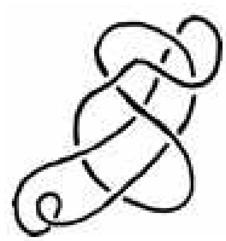
Ribbon no. 5.



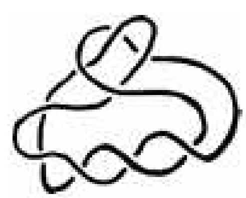
Ribbon no. 6.



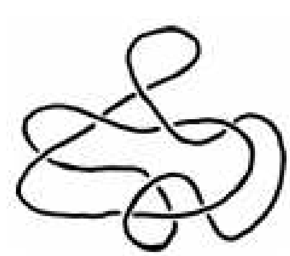
Ribbon no. 7.



Ribbon no. 8.



Ribbon no. 9.



Ribbon no. 10.

Artwork: Friederike Hofmann

**Antwortmöglichkeiten:**

1. Band Nr. 1.
2. Band Nr. 2.
3. Band Nr. 3.
4. Band Nr. 4.
5. Band Nr. 5.
6. Band Nr. 6.
7. Band Nr. 7.
8. Band Nr. 8.
9. Band Nr. 9.
10. Band Nr. 10.

**Projektbezug:**
Die physikalischen Eigenschaften von Materialien werden in hohem Maße von ihrer Mikrostruktur bestimmt. Einige Materialien sind hochgeordnet wie Kristalle, andere sind polykristallin wie Gesteine oder Metalle, wieder andere sind zellular wie Seife oder Metallschäume, ungeordnet wie amorphe Feststoffe, und einige sind sogar verwickelt wie DNA.

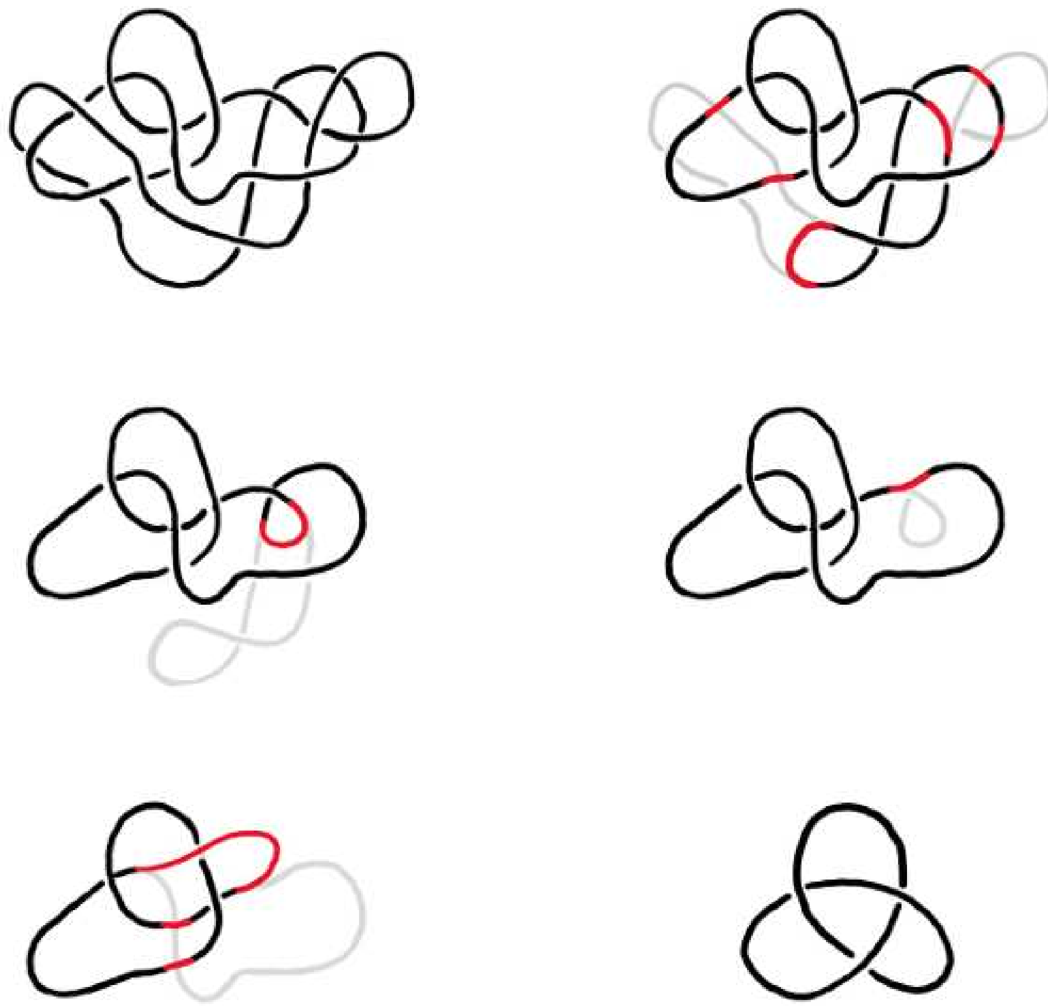
Das Thematische Einstein-Semester 2021 „Geometrische und topologische Struktur von Materialien“ widmete sich den jüngsten mathematischen Entwicklungen für ein besseres Verständnis von Materialien, indem wesentliche Strukturmerkmale identifiziert oder berechnet wurden – was letztlich zu Verbesserungen in Produktionsprozessen oder zu neuen Designs von Materialien mit kontrollierten Eigenschaften führen kann.

## Lösung

**Richtige Antwort: 4**

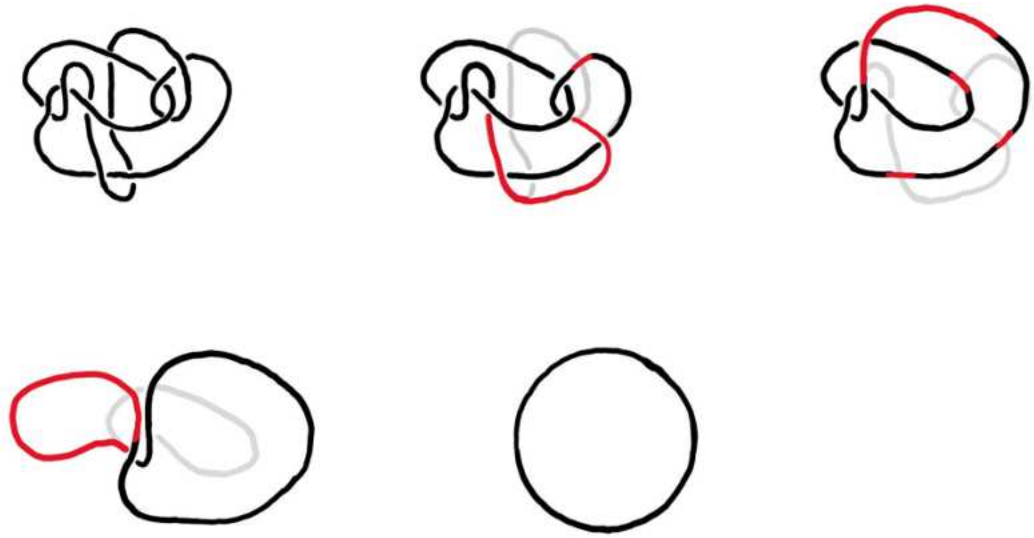
Wir werden das vierte Band in den *Kleeblattknoten* deformieren, der um den Schokoladentorus gewickelt war. Der Kleeblattknoten ist das einfachste Beispiel eines nichttrivialen Knotens.

**Band Nr. 4:**

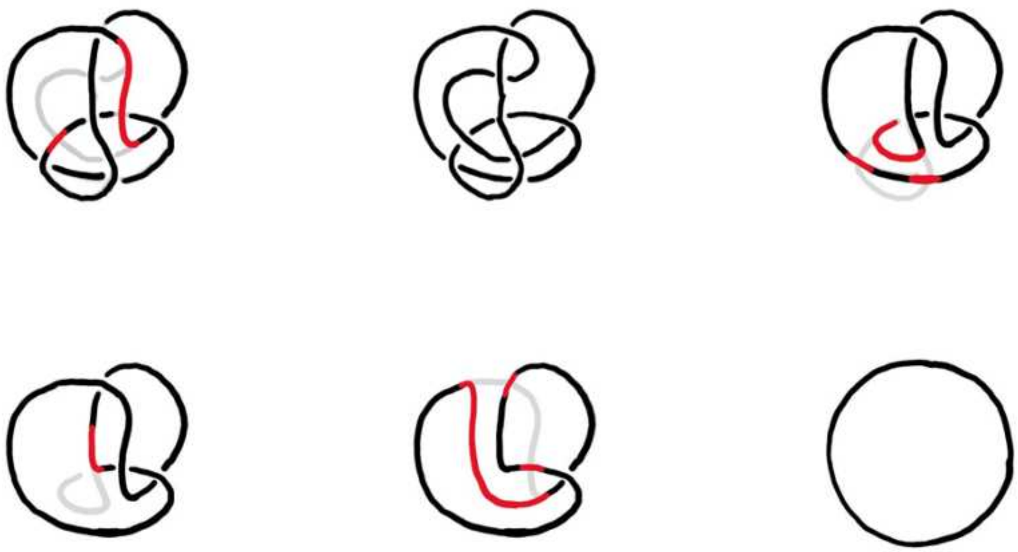


Die anderen Bänder können tatsächlich in den *Unknoten*, d.h. den trivialen Knoten, verwandelt werden, der um die anderen Geschenke gewickelt war.

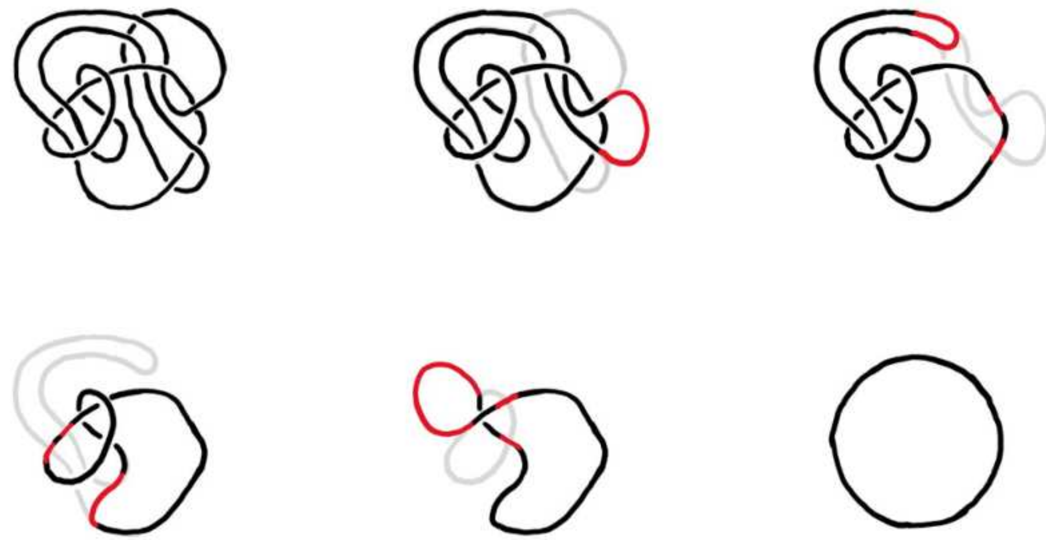
**Band Nr. 1:**



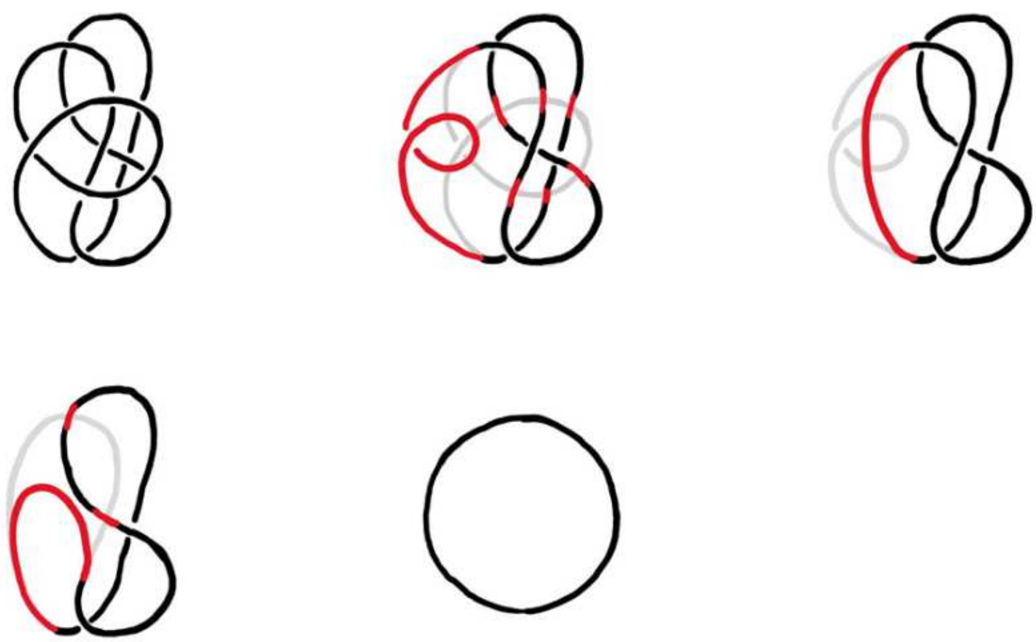
**Band Nr. 2:**



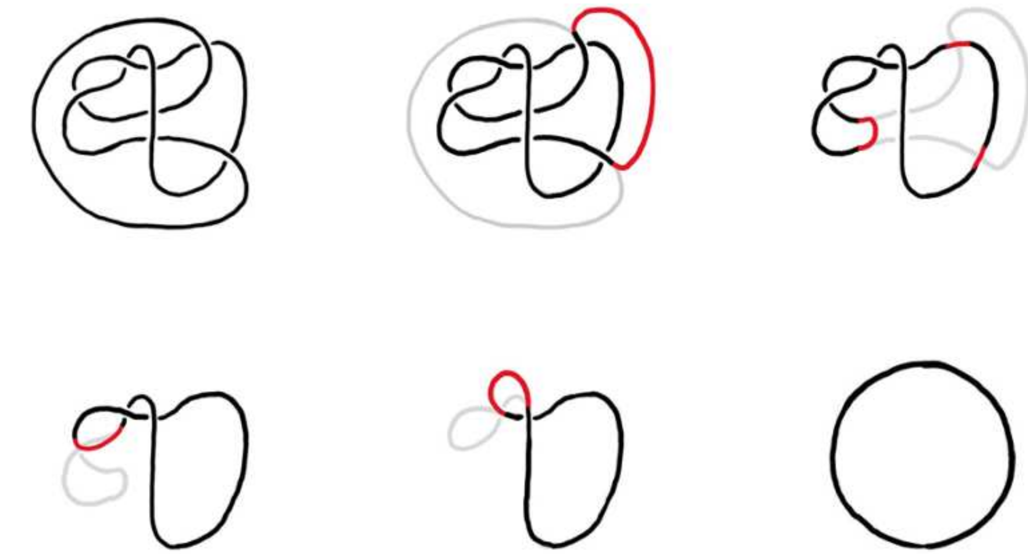
**Band Nr. 3:**



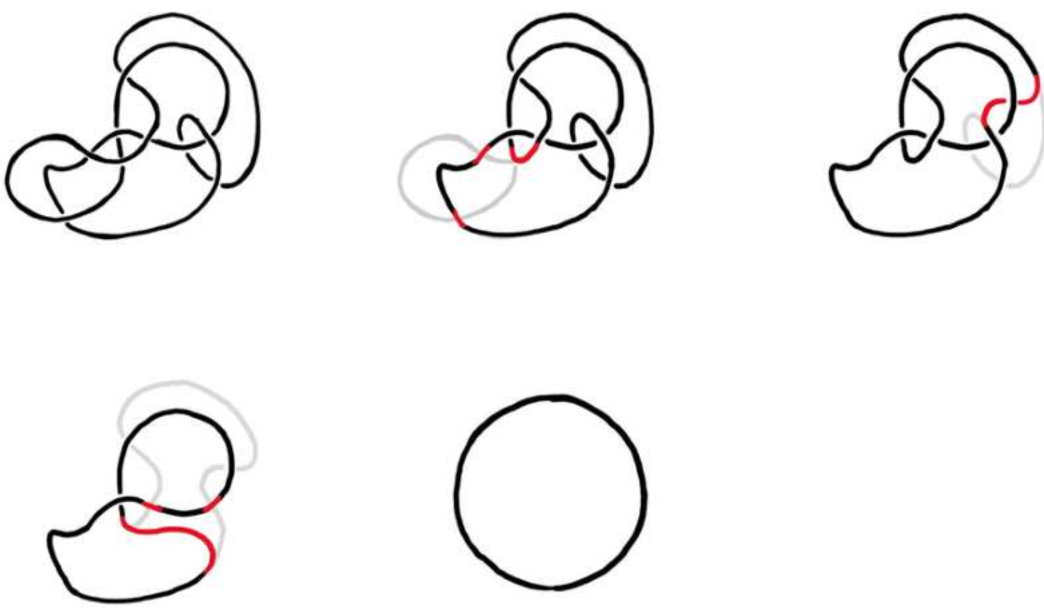
**Band Nr. 5:**



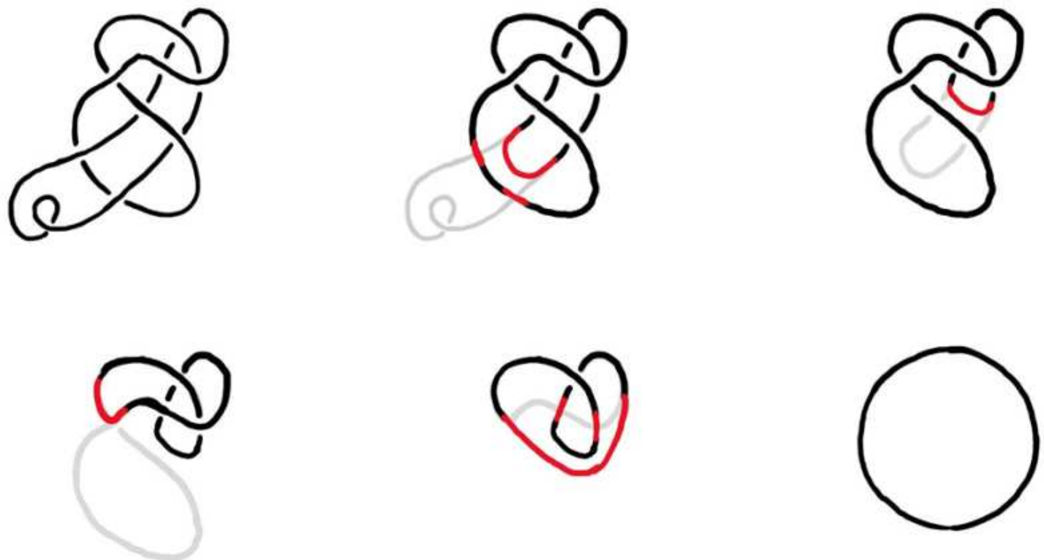
**Band Nr. 6:**



**Band Nr. 7:**

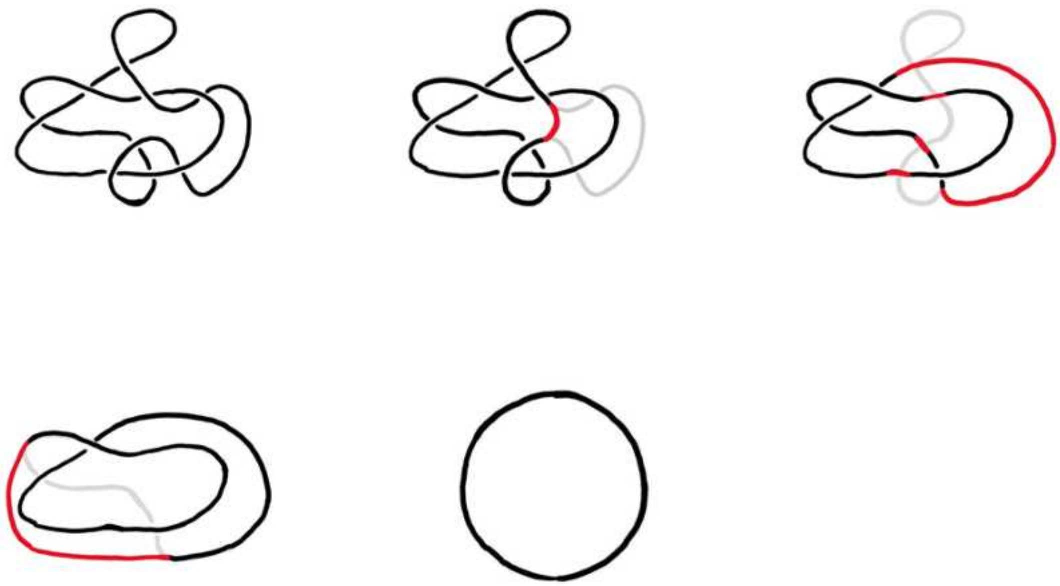


**Band Nr. 8:**



**Band Nr. 9:**

**Band Nr. 10:**



Die Bewegungen, die wir an den zehn Bändern vorgenommen haben, sind Varianten der drei *Reidemeister-Bewegungen*, die ein Knotendiagramm in gleichwertige (oder *isotope*) Knotendiagramme umwandeln.

# 2022 Das Schokoladenspiel

Autoren: Olaf Parczyk, Silas Rathke (FU Berlin)
Projekt: *Lernen extremer Strukturen in der Kombinatorik* (EF 1-12)

## Aufgabe

Artwork: Friederike Hofmann

Die superklugen Elfen Atto und Bilbo haben eine große Tafel Schokolade mit $n$ Spalten und $m$ Reihen, wobei $m$ und $n$ positive ganze Zahlen sind. Wir bezeichnen mit $(i, j)$ das Stück in der $i$-ten Spalte und der $j$-ten Reihe der Schokolade. Das Stück $(n, m)$ ist mit Orangengelee gefüllt und daher ekelhaft (dies muss nicht bewiesen werden).

Atto und Bilbo spielen das folgende Spiel: *beginnend mit Atto* machen sie abwechselnd Züge. Ein Zug besteht darin, ein noch verfügbares Stück $(i, j)$ auszuwählen und alle Stücke $(i', j')$ zu essen, für die $i' \leq i$ und $j' \leq j$ gilt. Wer das Stück $(n, m)$ mit dem Orangengelee essen muss, verliert.

**Beispiel:** Ein möglicher Zug für $n = 7$ und $m = 4$ könnte so aussehen: Wenn ein Spieler das Stück $(4, 2)$ wählt, muss er die blau markierten Stücke essen:

Das Stück $(7, 4)$ mit dem Orangengelee ist mit einem roten X markiert. In diesem Beispiel könnte ein Spiel, das Atto am Ende verliert, so aussehen:

1. Atto (blau) beginnt mit dem Stück $(4, 2)$.
2. Dann wählt Bilbo (orange) das Stück $(3, 4)$.
3. Nun wählt Atto $(6, 4)$.
4. Danach wählt Bilbo $(7, 3)$.
5. Schließlich muss Atto in seinem letzten Zug das Stück $(7, 4)$ mit dem Orangengelee essen.

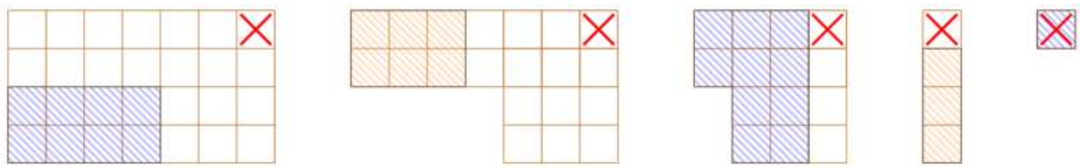


Abbildung 12: Ein mögliches Spiel mit einer Schokoladentafel der Größe $7 \times 4$

Abhängig von $m$ und $n$ gibt es *entweder* eine Strategie, die Atto einen Sieg garantiert, *oder* eine Strategie, die Bilbo einen Sieg garantiert.

Wenn wir $m$ und $n$ unabhängig und zufällig aus der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, 10^6\}$ wählen, wobei alle Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt werden, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit $p$, dass Atto eine Gewinnstrategie hat?

**Antwortmöglichkeiten:**

1. $p < 10\%$
2. $10\% \leq p < 20\%$
3. $20\% \leq p < 30\%$
4. $30\% \leq p < 40\%$
5. $40\% \leq p < 50\%$
6. $50\% \leq p < 60\%$
7. $60\% \leq p < 70\%$
8. $70\% \leq p < 80\%$
9. $80\% \leq p < 90\%$
10. $90\% \leq p \leq 100\%$

## Projektbezug:

Im Projekt EF 1-12 *Lernen extremer Strukturen in der Kombinatorik* verwenden wir Ansätze aus dem Bereich der künstlichen Intelligenz und des maschinellen Lernens, um neue Strukturen mit bestimmten Eigenschaften zu finden. Dies hilft uns auch, neue Gewinnstrategien für kombinatorische Spiele zu finden, ähnlich wie in dieser Aufgabe.

## Lösung

### Richtige Antwort: 10

Interessanterweise ist es nach Wissen der Autoren bisher niemandem gelungen, eine explizite Gewinnstrategie für alle möglichen $(m, n)$ zu formulieren. Es ist jedoch bekannt, dass Atto fast immer eine Gewinnstrategie haben muss:

**Behauptung:** Für $(m, n) = (1, 1)$ hat Bilbo eine Gewinnstrategie. In allen anderen Fällen hat Atto eine.

**Beweis:**

1. Wenn $(m, n) = (1, 1)$ ist, muss Atto in seinem ersten Zug das Stück mit dem ekelhaften Orangengelee essen.

2. Sei nun $(m, n) \neq (1, 1)$. Wir wollen beweisen, dass Atto in diesem Fall eine Gewinnstrategie hat. Wir führen den Beweis durch Widerspruch, d.h., wir nehmen an, dass Bilbo eine Gewinnstrategie hat. Das bedeutet, dass Bilbo immer einen Antwortzug hat, egal für welche Züge Atto sich entscheidet, der ihm den Sieg ermöglicht.

   Insbesondere hat Bilbo eine Antwort, wenn Atto im ersten Zug das Feld $(1, 1)$ wählt. Sei $(i, j)$ ein solcher Antwortzug von Bilbo auf Attos Zug $(1, 1)$, der ihm den Sieg ermöglicht. Das bedeutet aber auch, dass Atto $(i, j)$ in seinem ersten Zug hätte wählen können und gewonnen hätte.

   Dies ist ein Widerspruch, was bedeutet, dass es keine Gewinnstrategie für Bilbo für $(m, n) \neq (1, 1)$ geben kann.

Daraus ergibt sich, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist:

$$p = \frac{10^6 \cdot 10^6 - 1}{10^{12}} = \frac{999,999,999,999}{1,000,000,000,000} = 0.9999999999.$$

## 2023 Verräterische Töne

Autor*innen: Svenja M. Griesbach & Max Klimm
Projekt: Information design for Bayesian networks (MATH+ AA3-9)

### Aufgabe

Für dieses Rätsel schlüpfst du in die Rolle des Grinch, der dem Weihnachtsmann und seinen Elfen immer wieder in die Quere kommt. Um dich dieses Jahr von den Streichen an Heiligabend abzuhalten, haben die Elfen dir ein Angebot gemacht: Sie haben heute den ganzen Tag Plätzchen gebacken und du sollst erraten, welche Sorte heute gebacken wurde. Wenn du die richtige Sorte errätst, bekommst du eine riesige Keksdose mit frischen Plätzchen geschenkt. Wenn du allerdings falsch tippst, musst du im Gegenzug versprechen, an Heiligabend keine Streiche zu spielen. Du bist zwar häufig frech, aber wenn es zu solchen Angeboten kommt, kannst du dich auf die Ehrlichkeit der Elfen immer verlassen und wirst dich daher auch selbst an das Versprechen halten. Da es nur drei unterschiedliche Kekssorten (*Vanillekipferl, Nussecken* und *Schokoplätzchen*) gibt, die die Elfen regelmäßig und mit gleicher Wahrscheinlichkeit backen, sind die Elfen überzeugt, dass du in zwei von drei Fällen falsch raten wirst und sie somit gute Chancen auf ein entspanntes Weihnachtsfest haben. Allerdings hast du das Verhalten der Elfen die letzten Jahre schon sehr gut beobachtet und somit ein paar Informationen über deren Verhalten gesammelt. Dir ist zum Beispiel aufgefallen, dass die Elfen beim Backen der Vanillekipferl immer *Driving Home For Christmas* hören. Wenn sie hingegen Nussecken backen, hören sie mit gleicher Wahrscheinlichkeit mal *All I Want For Christmas Is You* und manchmal *Last Christmas*. Anders ist das, wenn sie Schokoplätzchen backen. Zwar hören sie auch währenddessen immer nur entweder *All I Want For Christmas Is You* oder *Last Christmas* in der Dauerschleife, aber in zwei von drei Fällen läuft *All I Want For Christmas Is You*.
Welche Aussage über die drei Weihnachtslieder und Kekssorten ist richtig?

### Antwortmöglichkeiten

1. Das Lied *Driving Home For Christmas* wird am häufigsten gespielt.
2. Wenn du weißt, welches Lied heute gespielt wurde, kannst du deine durchschnittliche Gewinnwahrscheinlichkeit auf mehr als 70% erhöhen.
3. Es gibt kein Lied, bei dem du dir ganz sicher sein kannst, welche Kekse heute gebacken wurden.
4. Wenn *All I Want For Christmas Is You* gespielt wurde, hast du die höchsten Gewinnchancen, wenn du auf die Nussecken tippst.
5. Nussecken werden häufiger als Schokokekse und Vanillekipferl gebacken.
6. Wenn *Last Christmas* gespielt wurde, kannst du keine Kekssorte sicher ausschließen.
7. Die Wahrscheinlichkeit, dass Schokoplätzchen gebacken wurden und die Elfen dabei *All I Want For Christmas Is You* gehört haben, liegt bei $\frac{2}{3}$.

8. Wenn das Lied *Driving Home For Christmas* gespielt wurde, ist jede Kekssorte gleich wahrscheinlich.

9. Die Wahrscheinlichkeit, dass du heute *Last Christmas* gehört hast, liegt bei 20%.

10. *All I Want For Christmas Is You* wird am häufigsten gespielt und *Driving Home For Christmas* am seltensten.

**Projektbezug:**

Im Math+ Projekt AA3-9 *Information design for Bayesian networks* wird untersucht, inwiefern durch die Weitergabe von Informationen Verkehrsgleichgewichte verbessert werden können. Dabei wird angenommen, dass die Verkehrsteilnehmenden aus den zur Verfügung gestellten Informationen Rückschlüsse über den tatsächlichen Verkehr ziehen können. Dies geschieht nach einem ähnlichen Prinzip, nach dem auch hier der Grinch in der Aufgabe durch das Hören der Musik Rückschlüsse auf die gebackene Kekssorte zieht.

## Lösung

**Die richtige Antwort ist: 2.**

Um das Rätsel zu lösen müssen wir uns genau anschauen, welche Informationen uns die einzelnen Lieder geben. Wir kürzen die Lieder mit $L_1, L_2$ und $L_3$ für *Driving Home For Christmas, All I Want For Christmas* und *Last Christmas* ab und die Kekssorten mit $K_1, K_2$ und $K_3$ für *Vanillekipferl, Nussecken* und *Schokoplätzchen*. Da alle Plätzchen mit gleicher Wahrscheinlichkeit gebacken werden, gilt

$$P(K_1) = P(K_2) = P(K_3) = \frac{1}{3}.$$

Die Antwort 5 ist also falsch. Außerdem können wir dem Text folgende *bedingte* Wahrscheinlichkeiten[5] entnehmen:

$$\begin{aligned}
&P(L_1|K_1) = 1 \qquad && P(L_2|K_1) = 0 \qquad && P(L_3|K_1) = 0 \\
&P(L_1|K_2) = 0 && P(L_2|K_2) = \frac{1}{2} && P(L_3|K_2) = \frac{1}{2} \\
&P(L_1|K_3) = 0 && P(L_2|K_3) = \frac{2}{3} && P(L_3|K_3) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Hieraus können wir mit Hilfe des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit uns zunächst herleiten, wie wahrscheinlich es ist, die einzelnen Lieder zu hören. Dieser besagt, dass die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich ist der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die zu diesem Ereignis führen:

$$\begin{aligned}
P(L_1) &= P(L_1|K_1) \cdot P(K_1) + P(L_1|K_2) \cdot P(K_2) + P(L_1|K_3) \cdot P(K_3) \\
&= 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\
P(L_2) &= P(L_2|K_1) \cdot P(K_1) + P(L_2|K_2) \cdot P(K_2) + P(L_2|K_3) \cdot P(K_3) \\
&= 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{18} \\
P(L_3) &= P(L_3|K_1) \cdot P(K_1) + P(L_3|K_2) \cdot P(K_2) + P(L_3|K_3) \cdot P(K_3) \\
&= 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18}.
\end{aligned}$$

Die Antworten 1, 9 und 10 können damit ausgeschlossen werden. Mit dem Satz von Bayes der besagt,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

$$\begin{aligned}
&P(K_1|L_1) = 1 \qquad && P(K_2|L_1) = 0 \qquad && P(K_3|L_1) = 0 \\
&P(K_1|L_2) = 0 && P(K_2|L_2) = \frac{3}{7} && P(K_3|L_2) = \frac{4}{7} \\
&P(K_1|L_3) = 0 && P(K_2|L_3) = \frac{3}{5} && P(K_3|L_3) = \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

[5] Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis $A$ eintritt, unter der Bedingung, dass bereits bekannt ist, dass das Ereignis $B$ eingetreten ist. Sie wird durch die Formel $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ gegeben.

können wir die anderen bedingten Wahrscheinlichkeiten berechnen. Damit lassen sich die Antworten 3, 4, 6 und 8 als falsch identifizieren. Abhängig von dem Lied, das wir heute gehört haben, wissen wir jetzt also, welche Kekssorte am wahrscheinlichsten ist. Unsere Gewinnwahrscheinlichkeit maximieren wir somit wie folgt:

- wenn wir Lied $L_1$ (Driving Home For Christmas) hören, tippen wir auf Kekssorte $K_1$ (Vanillekipferl),
- wenn wir Lied $L_2$ (All I Want For Christmas) hören, tippen wir auf Kekssorte $K_3$ (Schokoplätzchen) und
- wenn wir Lied $L_3$ (Last Christmas) hören, tippen wir auf Kekssorte $K_2$ (Nussecken).

Um jetzt noch unsere Gewinnwahrscheinlichkeit zu berechnen, müssen wir noch einbeziehen, wie die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Lieder sind. Bezeichnen wir mit $R$ das Ereignis, bei dem wir richtig raten, erhalten wir die Gewinnwahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}P(R) &= P(L_1)\cdot P(K_1|L_1) + P(L_2)\cdot P(K_3|L_2) + P(L_3)\cdot P(K_2|L_3)\\ &= \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{7}{18}\cdot\frac{4}{7} + \frac{5}{18}\cdot\frac{3}{5}\\ &= \frac{13}{18} \approx 72{,}2\%.\end{aligned}$$

Die richtige Lösung ist also Antwortmöglichkeit 2. Um schließlich die Antwort 7 zu widerlegen, müssen wir lediglich berechnen:

$$P(L_2\cap K_3) = P(K_3)\cdot P(L_2|K_3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$