Lösungsheft 2015

DIGITALER MATHEON KALENDER

Forschungszentrum MATHEON
Mathematik für Schlüsseltechnologien

3TU.AMI

In diesem Heft finden Sie die Lösungen zu den Aufgaben des Matheon-Kalenders 2015. Die vorgeführten Lösungswege sind ausschließlich als Vorschläge zu verstehen. Andere Lösungswege sind durchaus möglich.
Weitere Diskussions- und Klärungsmöglichkeiten zu den Aufgaben finden Sie im zugehörigen Forum des Mathekalenders.
Wir danken Ihnen herzlich für Ihre Teilnahme am Matheon-Kalender.
Mit freundlichen Grüßen,
Ihr Matheon-Kalender-Team

Richtige Lösungen in Überblick

Nummer	Name	Richtige Antwort
1	Die Anonymität des Netzes	9
2	Mondrian	6
3	Wo bleibt der Lift?	4
4	Der Weihnachtsmann und der Grinch	4
5	Bummestreik	8
6	Gleichgewicht	10
7	Twelve points go to ...	8 & 10
8	Leichter als Luft	8
9	Streik der Geschenkeverpacker	2
10	Schneeburg	9
11	Die Uhr mit dem roten Knopf	9
12	Weihnachtskugeln in verschiedenen Höhen	3
13	Nachbarschaftsstreit	4
14	Weinkeller	5
15	Schneeflocke	3
16	Die Hochebene Xavia	2
17	Weihnachtsstimmung	8
18	Granitblock	4
19	Summe und Produkt	9
20	Riesige Potenzen	3
21	Wasserfass	7
22	Tiefschnee	3 & 6
23	Mützen und Zahlen	10
24	Die ω-Strahlung	5

Inhaltsverzeichnis

1 Die Anonymität des Netzes

Autor: Christian Hercher

Lösung

Die richtige Antwortmöglichkeit ist:

9. Hieronymo

Erläuterung:

Zuerst bemerkt man, dass unter den Rentieren als einzige Inka sechs verschiedene Freunde besitzt; genauso wie Zeus im Netzwerk Rentierbuch. Also ist Zeus = Inka.

Die einzigen zwei anderen Rentiere, die nicht mit Inka befreundet sind, sind Jordan und Norbert. Da Norbert zwei und Jordan drei Freunde hat, können auch sie eindeutig im Netzwerk identifiziert werden: Zeus ist nur nicht mit Poseidon und Ares befreundet, während Ares zwei und Poseidon drei Freunde besitzt. Also ist Ares = Norbert und Poseidon = Jordan.

Norbert ist mit Jordan befreundet. Das bringt uns keine neue Information. Aber daneben ist er auch mit Quinten befreundet, sodass auch dieser im Netzwerk analog seinen Widerpart findet, denn der einzige Freund von Ares neben Poseidon ist Hera; also Hera = Quinten.

Jordan ist neben Norbert auch noch mit Oliver und Anna befreundet. Problem: Beide haben je drei Freunde. Daran können wir sie also nicht unterscheiden. Doch unter den je drei Freunden von Oliver und Anna befinden sich jeweils Jordan (klar) und Inka. Der dritte Freund von Oliver ist Geronimo, der drei Freunde besitzt, während der dritte Freund von Anna Pieter ist, der nur zwei Freunde besitzt.

Damit können wir sie im Netz identifizieren: Poseidon besitzt neben Ares noch die zwei weiteren Freunde Hermes und Athene, welche jeweils selbst drei Freunde haben, davon Poseidon und Zeus gemeinsam. Aphrodites dritter Freund ist Demeter, die nur zwei Freunde besitzt, während Hermes dritter

Freund Artemis ist, welche widerum drei Freunde hat. Also ist Athene = Anna und Hermes = Oliver. Als Bonus erhalten wir gleich die Identifizierung der dritten Freunde der beiden mit: Demeter = Pieter und Artemis = Geronimo.

Dann bleibt als letzte Person nur noch Aphrodite übrig, die damit Hieronymo im realen Leben heißt.

Damit ist die korrekte Antwort: 9) Hieronymo.

Bemerkung: Das hier angewandte Verfahren - erst ein paar wenige, herausragende Gestalten zu identifizieren, und dann Stück für Stück aus den schon bekannten Freunden und der Anzahl der jeweils unbekannten weiteren weitere Identifizierungen abzuleiten - ist auch die Kernidee des Algorithmus, der schnell eine Deanonymisierung in einem Sozialen Netzwerk bzw. Isomorphie zwischen zwei isomorphen, skalenfreien Graphen finden kann.

2 Mondrian

Autor: Hajo Broersma (Universiteit Twente)

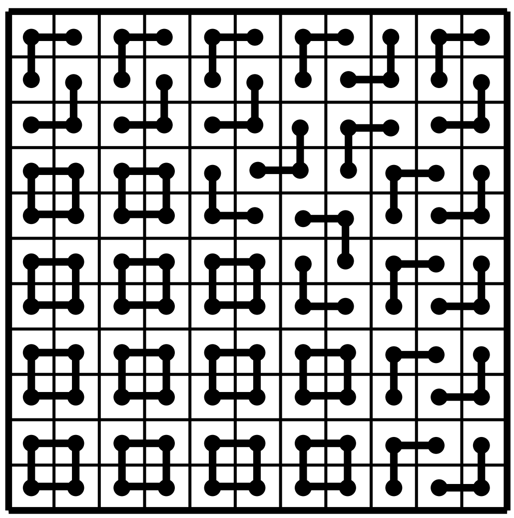
Lösung

Die richtige Antwortmöglichkeit ist:

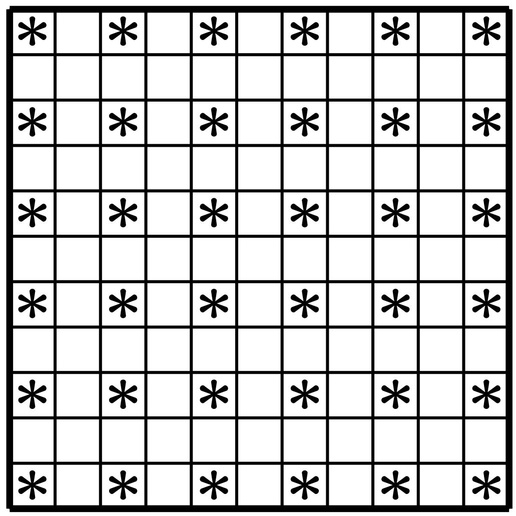
6. Die kleinstmögliche Zahl an L-Kringeln beträgt 23.

Erläuterung:

Das folgende Bild zeigt eine mögliche Lösung mit 23 L-Kringeln:



Nun zeigen wir noch, dass es keine Lösung mit weniger als 23 L-Kringeln gibt. Wir bezeichnen die Anzahl der L-Kringel mit x und jene der restlichen Kringel mit y. Da jeder L-Kringel drei Quadrate und jeder andere Kringel vier Quadrate überdeckt, gilt dann $3x + 4y = 121$. Im folgenden Bild sind 36 Quadrate mit Sternen markiert.



Da kein einziger Kringel gleichzeitig zwei Sterne überdecken kann, erhalten wir $x + y \geq 36$. Wenn wir diese Ungleichung mit 4 multiplizieren und vom Resultat die Gleichung $3x + 4y = 121$ subtrahieren, so erhalten wir die gewünschte untere Schranke $x \geq 23$.

3 Wo bleibt der Lift?

Autor: Rudi Pendavingh (TU Eindhoven)

Lösung

Die richtige Antwortmöglichkeit ist:

4. 14 Etagen

Erläuterung:

Hier ist ein möglicher Plan für 14 Etagen, der jedem Lift genau sechs Etagen (und gleichzeitig jeder Etage genau drei Lifte) zuordnet:

Lift 1:	1,	2,	3,	4,	5,	6
Lift 2:	1,	2,	7,	8,	9,	10
Lift 3:	1,	2,	11,	12,	13,	14
Lift 4:	3,	4,	7,	8,	11,	12
Lift 5:	3,	4,	9,	10,	13,	14
Lift 6:	5,	6,	7,	8,	13,	14
Lift 7:	5,	6,	9,	10,	11,	12

Das Gebäude ist also mindestens 14 Etagen hoch. Nun zeigen wir noch, dass der Wert $n = 14$ für die Anzahl n der Etagen bestmöglich ist.

In dem obigen Plan wird jede Etage genau von 3 Liften angefahren. Angenommen, in dem Verwaltungsgeba ude gibt es eine Etage, die nur von einem Lift versorgt wird. Dann kann man von dieser nur 5 andere Etagen anfahren und es gibt damit höchstens 6 Etagen. Da gilt: $6 < 14$, kommt dieser Fall also nicht in Betracht.
Falls es eine Etage gibt, die nur von zwei Liften versorgt wird, so kann man von dieser Etage aus höchstens $5 + 5 = 10$ andere Etagen mit einer einzigen Liftfahrt erreichen; in diesem Fall gibt es also höchstens 11 Etagen.
In allen anderen verbleibenden Fällen wird jede Etage von mindestens drei Liften versorgt. Jeder der sieben Lifte bleibt auf höchstens sechs Etagen stehen; das ergibt höchstens $7 \cdot 6 = 42$ Haltepunkte. Jede der n Etagen verbraucht mindestens drei Haltepunkte; das ergibt mindestens $3n$ Haltepunkte. Aus $3n \leq 42$ folgt nun das gewünschte $n \leq 14$.

4 Der Weihnachtsmann und der Grinch

Autor: Wilhelm Stannat (TU Berlin)

Lösung

Die richtige Antwortmöglichkeit ist:

4. $0.3 \leq p < 0.4$

Erläuterung:

Zunächst einmal macht man sich klar, dass der Weihnachtsmann auf dem Weg von Ahausen nach Bdorf insgesamt genau 8 km nordwärts und 8 km ostwärts fahren muss, wenn man einmal annimmt, dass der Abstand zwischen zwei benachbarten Kreuzungen bzw. Einmündungen jeweils 1 km beträgt. Jeder mögliche Weg hat also die Länge $2 \cdot 8 = 16[km]$ und kann eindeutig durch eine 0-1-Folge der Länge 16 beschrieben werden, mit genau 8 Nullen (und 8 Einsen), wobei eine “0” für `nordwärts` und eine “1” für `ostwärts` steht. Die Anzahl der möglichen Wege, die der Weihnachtsmann somit auf seinem eingeschränkt manövrierfähigen Elektroschlitten von Ahausen nach Bdorf nehmen kann, ist also gleich der Anzahl der Möglichkeiten, 8 Einsen (oder 8 Nullen) auf insgesamt 16 Positionen zu verteilen. Die Anzahl hierfür beträgt $\binom{16}{8} = \frac{16!}{8!8!} = 12870$.

Um nun die Anteil derjenigen Wege hierunter zu bestimmen, auf denen der Weihnachstmann auf den Grinch stößt, muss man zunächst die Anzahl der möglichen Wege von Ahausen hin zum Grinch, 5-mal nordwärts und 4-mal ostwärts, mit der Anzahl der möglichen Wege vom Grinch weg nach Bdorf, 3-mal nordwärts und 4-mal ostwärts, multiplizieren. Analog zur ersten Argumentation ergeben sich also $\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!5!} = 126$ Wege zum Grinch hin und $\binom{7}{4} = \frac{7!}{3!4!} = 35$ Wege vom Grinch weg, also insgesamt $126 \cdot 35 = 4410$ mögliche Wege von Ahausen nach Bdorf, auf denen der Weihnachtsmann dem Grinch begegnet. Für den gesuchten Anteil ergibt sich somit $p = 4410/12870 = 0.34266$.

Ergänzung: Der gesuchte Anteil entspricht einer Wahrscheinlichkeit im Zusammenhang einer Irrfahrt auf dem zweidimensionalen Gitter $\mathbb{Z}^2$, die man durchläuft, wenn man in Ahausen startet und an jeder Straßenkreuzung mit

Wahrscheinlichkeit 0.5 entweder `ostwärts` oder `nordwärts` weiterfährt. Der gesuchte Anteil ist dann gerade die bedingte Wahrscheinlichkeit, dem Grinch auf seiner Irrfahrt zu begegnen, unter der Bedingung, dass man auf seiner Irrfahrt nach insgesamt 16 km in Bdorf angekommen ist.
Variiert man die Länge n des Quadrates und lauert der Grinch an Position (x, y), mit $x, y \in \{1, \dots, n-1\}$, so erhält man für die entsprechende Wahrscheinlichkeit p unter Zuhilfenahme des Zentralen Grenzwertsatzes die Asymptotik

$$p \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{n}{(x+y)(2n-(x+y))}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-y)^2}{x+y} - \frac{1}{2}\frac{(x-y)^2}{2n-(x+y)}\right)$$

also beispielsweise in der Aufgabenstellung ($n = 8$, $x = 4$, $y = 5$) $p \sim 0.35415$.

5 Bummelstreik

Autorin/Autor: Martin Hoefer

Lösung

Die richtige Antwortmöglichkeit ist:

8. 108 Kilometer

Erläuterung:

Wir bezeichnen die Länge des Weges, den der Schlitten in den ersten t Stunden zurücklegt mit $W(t)$. Dann gilt

$$\frac{W(t)}{t} = \frac{240}{t+3} \quad , \qquad 1 \leq t \leq 7.$$

(Der linke Bruch misst die bisherige Durchschnittsgeschwindigkeit, der rechte Bruch misst die Durchschnittsgeschwindigkeit für den Gesamtweg laut Tum-Tum.) Wir erhalten $W(1) = \frac{240}{4} = 60$ und $W(7) = \frac{240 \cdot 7}{10} = 168$. Während des Bummelstreiks zwischen $t = 1$ und $t = 7$ legt der Schlitten also $168 - 60 = 108$ Kilometer zurück. Antwort 8 ist korrekt.

6 Gleichgewicht

Autorin/Autor: Judith Keijsper (TU Eindhoven)

Lösung

Die richtige Antwortmöglichkeit ist:

10. $N = 119$

Erläuterung:

Wir bepacken den ersten Schlitten mit den Paketen $1, 2, ..., 84$; das Gesamtgewicht beträgt 3570. Wir bepacken den zweiten Schlitten mit den Paketen $85, 86, ..., 119$; das Gesamtgewicht beträgt ebenfalls 3570. Beide Ladungen sind also gleich schwer. Wenn wir zwei Pakete vom ersten Schlitten wegnehmen, so fällt dessen Gesamtgewicht um höchstens $83 + 84 = 167$. Wenn wir zwei Pakete vom zweiten Schlitten wegnehmen, so fällt dessen Gesamtgewicht um mindestens $85 + 86 = 171$. Nach dem Wegnehmen kann unmöglich Gleichgewicht herrschen.
Nun wollen wir noch zeigen, dass keine der anderen Antworten mit der Geschichte kompatibel ist. Wir betrachten also eine Aufteilung der Zahlen (Pakete) $1, \ldots, N$ in zwei Mengen (Ladungen) S und T mit gleicher Summe (gleichem Gewicht). Aus Symmetriegründen nehmen wir $1 \in S$ an. Die kleinste Zahl in T bezeichnen wir mit $x \geq 2$; dann gilt natürlich $\{1, 2, \ldots, x-1\} \subseteq S$.

(a) Angenommen, es existiert ein $y \geq x+1$ mit $y \in T$ und $y+1 \in S$. Dann könnte der Weihnachtsmann die beiden Zahlen/Pakete $x-1$ und $y+1$ von S wegnehmen und die beiden Zahlen/Pakete x und y von T wegnehmen; beide Ladungen würden sich um $x + y$ verringern und wären danach immer noch gleich schwer. Widerspruch! Wir folgern, dass für alle $y \geq x + 1$ gilt: Falls $y \in T$, dann auch $y + 1 \in T$.

(b) Wir definieren z als die kleinste Zahl in T, die echt grösser als x ist. Wegen (a) gilt dann $S = \{1, \ldots, x-1\} \cup \{x+1, \ldots, z-1\}$ und $T = \{x\} \cup \{z, \ldots, N\}$.

Angenommen, es gilt $z \geq x+3$. Dann gilt $x+1 \neq z-1$. Der Weihnachtsmann könnte die beiden Zahlen $x+1$ und $z-1$ von S wegnehmen und die beiden Zahlen x und z von T wegnehmen; beide Ladungen würden sich um $x+z$ verringern und wären danach immer noch gleich schwer. Widerspruch! Wir folgern $z \leq x+2$.

(d) Da $x+1 \leq z \leq x+2$ gilt, bleiben nur die beiden Fälle $z = x+1$ und $z = x+2$ zu betrachten. Im ersten Fall gilt $S = \{1, \ldots, x-1\}$ und $T = \{x, \ldots, N\}$. Im zweiten Fall gilt $S = \{1, \ldots, x-1\} \cup \{x+1\}$ und $T = \{x\} \cup \{x+2, \ldots, N\}$. Im ersten Fall ist die Summe der Zahlen $1, \ldots, x-1$ gleich der Hälfte der Summe der Zahlen $1, \ldots, N$; das ergibt

$$N(N+1) = 2(x-1)x \tag{1}$$

Im zweiten Fall erhalten wir auf ähnliche Art die Gleichung

$$N(N+1) = 2x(x+1) + 4 \tag{2}$$

Wenn wir in (1) und (2) die Zahlen N aus den zehn Antwortmöglichkeiten einsetzen, so ergibt sich nur für $N = 119$ in (1) eine positive ganzzahlige Lösung $x = 85$. Daher kann nur Antwort Nr. 10 richtig sein.

Eine genauere mathematische Analyse zeigt, dass die Gleichung (2) gar keine positiven ganzen Lösungen N und x besitzt. Die Gleichung (1) hat unendlich viele Lösungen, die wie folgt aussehen: Die beiden kleinsten möglichen positiven Werte für N sind $N_1 = 3$ und $N_2 = 20$. Alle weiteren Werte sind durch die rekursiv definierte Folge $N_k = 6N_{k-1} - N_{k-2} + 2$ gegeben. Unser Rätsel dreht sich um den dritten Wert $N_3 = 6 \cdot 20 - 3 + 2 = 119$ in dieser Folge.

7 Twelve points go to ...

Autor: Falk Ebert

Lösung

Die richtigen Antwortmöglichkeiten sind:

8. Amalthea kann schlimmstenfalls auf Rang 2 kommen.

10. In den meisten Fällen gewinnt Blitzen in der Gesamtwertung.

Erläuterung:

Setzen wir die Punktzahlen der Kontrahent_innen passend zu ihren Namen, dann gilt:

$$\begin{aligned} a &= 2p_1 + p_3 + p_4, \\ b &= p_1 + 2p_2 + p_3, \\ c &= p_1 + 3p_4, \\ d &= 2p_2 + 2p_3. \end{aligned}$$

Die eigentlichen Punktzahlen sind insofern irrelevant als dass es lediglich darauf ankommt, wie viel eine Platz-Punktwertung mehr als die nächstschlechtere Bewertung ist. Setzen wir für diese Stufen die nichtnegativen ganzen Zahlen s_1, s_2, s_3 und schreiben:

$$\begin{aligned} p_3 &= p_4 + s_3, \\ p_2 &= p_3 + s_2 = p_4 + s_3 + s_2, \\ p_1 &= p_2 + s_1 = p_4 + s_3 + s_2 + s_1. \end{aligned}$$

Die Bewertung des 4. Platzes ist damit vollkommen unwichtig und kann auch auf $p_4 = 0$ gesetzt werden. Die Bedingung, dass die Punktwertungen mit besserer Platzierung nicht fallen sollen, übersetzt sich in $s_1, s_2, s_3 \geq 0$. Daraus können wir jetzt sofort schlussfolgern, dass $a \geq c$ und $b \geq c$ sowie $b \geq d$.
Bereits die ESC 1962 Bewertung zeigt, dass eine Rangvergabe ohne Gleichstände möglich ist $(a = 7, b = 8, c = 3, d = 6)$. Damit entfällt Antwortmöglichkeit

1). Auf Grund von Voraussetzung 3) betrachten wir nun nur Fälle, in denen keine Gleichstände auftreten. Es gibt insgesamt 24 mögliche Permutationen der Platzierungen, von denen aber einige wegen der Forderungen $a > b, b > c, b > d$ entfallen:

$$
\begin{array}{ll}
a > b > c > d, & \cancel{c > a > b > d} \\
a > b > d > c, & \cancel{c > a > d > b} \\
\cancel{a > c > b > d}, & \cancel{c > b > a > d} \\
\cancel{a > c > d > b}, & \cancel{c > b > d > a} \\
\cancel{a > d > b > c}, & \cancel{c > d > a > b} \\
\cancel{a > d > c > b}, & \cancel{c > d > b > a} \\
b > a > c > d, & \cancel{d > a > b > c} \\
b > a > d > c, & \cancel{d > a > c > b} \\
\cancel{b > c > a > d}, & \cancel{d > b > a > c} \\
\cancel{b > c > d > a}, & \cancel{d > b > c > a} \\
b > d > a > c, & \cancel{d > c > a > b} \\
\cancel{b > d > c > a}, & \cancel{d > c > b > a}
\end{array}
$$

Jede der verbliebenen 5 Reihenfolgen kann auch wirklich auftreten. Zum Beispiel kann der Fall $b > d > a > c$ erreicht werden, indem s_3 besonders hoch gewählt wird ($4s_3$ taucht bei b und d auf, sonst ist der s_3 Anteil geringer.), z.B. $s_1 = 1, s_2 = 1, s_3 = 10$. Damit ist $p_4 = 0, p_3 = 10, p_2 = 11, p_1 = 12$ und $b = 44, d = 42, a = 34, c = 12$. Und damit ist auch Antwortmöglichkeit 8) widerlegt: Amalthea kann auch auf Platz 3 landen.

8 Leichter als Luft

Autoren: Antje Bjelde, Felix Fischer, Max Klimm

Lösung

Die richtige Antwortmöglichkeit ist:

8.

Erläuterung:

1. Ist **richtig**.

   Man kann jeden Ballon auf $\frac{1}{k}$ aufblasen, ohne dass sie zerplatzen. In der Summe ergibt dies ein Volumen von $k \cdot \frac{1}{k} = 1$.

2. Ist **richtig**.

   Eine mögliche Strategie ist es, zu versuchen, alle Ballons auf 1 aufzublasen. Dann platzen die Ballons $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{k}\}$, aber der Ballon mit Volumen 1 ist auch auf Volumen 1 aufgeblasen, daher ist der erwartete Gewinn dieser Strategie 1. Da eine optimale Strategie mindestens so gut ist wie jede andere Strategie, erreicht also auch jede optimale Strategie mindestens ein Volumen von 1.

3. Ist **richtig**.

   Betrachte die folgende Strategie: Wähle eine zufällige Reihenfolge der Ballons b_1, b_2, b_3. Versuche, b_1 auf 1 aufzublasen. Falls das klappt, versuche b_2 auf $\frac{1}{2}$ aufzublasen. Falls auch das klappt, blase b_3 auf $\frac{1}{3}$ auf. Falls ein Schritt nicht klappt, höre auf, aufzublasen. Diese Strategie hat $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ als einen möglichen Endzustand (nämlich, wenn b_1 der Ballon mit Volumen 1, b_2 der Ballon mit Volumen $\frac{1}{2}$, und b_3 der Ballon mit Volumen $\frac{1}{3}$ war). Dieser ist optimal, da jeder Ballon zu seinem vollen Volumen aufgeblasen ist, und jedes weitere Aufblasen nur die Ballons zum Platzen bringen würde.

4. Ist **richtig**.

   Betrachte die folgende Strategie: Wähle eine zufällige Reihenfolge der Ballons b_1, b_2, b_3. Versuche, b_1 auf 1 aufzublasen. Falls das klappt, blase

b_2 und b_3 auf $\frac{1}{3}$ auf. Falls das nicht klappt, höre auf, aufzublasen. Diese Strategie hat $\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$ als einen möglichen Endzustand (nämlich, wenn b_1 der Ballon mit Volumen 1 ist). Dieser ist optimal: Eine Verbesserung kann nur erzielt werden, falls man einen der Ballons, welcher im Moment auf $\frac{1}{3}$ aufgeblasen ist, auf $\frac{1}{2}$ aufbläst. Wenn man dies versucht, so gelingt dies mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$; dann hat man den Endzustand $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$. Falls dies nicht gelingt, was auch mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ der Fall ist, platzt der Ballon beim Überschreiten von $\frac{1}{3}$, dann kann aber der andere Ballon, welcher vorher auf $\frac{1}{3}$ aufgeblasen war, weiter auf $\frac{1}{2}$ aufgeblasen werden und man erreicht den Endzustand $\{1, \frac{1}{2}\}$. Insgesamt ist also der erwartete Gewinn, wenn man weiter aufbläst: $\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{3}$. Dies ist jedoch genauso viel, wie man erhält, wenn man nicht weiter aufbläst: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$, daher ist auch $\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$ ein optimaler Endzustand.

5. Ist **richtig**.

   Angenommen, es gibt einen optimalen Endzustand bei dem der Ballon mit Volumen 1 nicht komplett aufgeblasen ist. Wir bemerken zuerst, dass es nie ein optimaler Endzustand in einer optimalen Strategie sein kann, wenn der Ballon mit Volumen 1 geplatzt ist, da das weitere Aufblasen eines Ballons mit Volumen 1 über sein Limit hinaus diesen Ballon sicher zum Platzen bringt und den erwarteten Gewinn ohne Informationsgewinn für uns verringert. Wir unterscheiden daher zwei Fälle.
   Fall 1: Ein Ballon ist bereits geplatzt. Dann muss dieser Ballon beim Überschreiten von $\frac{1}{2}$ geplatzt sein, da das weitere Aufblasen (und somit zum Platzen bringen) eines Ballons mit Volumen 1 nie Teil einer optimalen Strategie sein kann. Der nicht geplatzte Ballon muss nun jedoch zwingend der Ballon mit Volumen 1 sein, und der erwartete Gewinn kann gesteigert werden, wenn man ihn auf Volumen 1 aufpustet. Das ist jedoch ein Widerspruch dazu, dass es ein optimaler Endzustand war.
   Fall 2: Noch kein Ballon ist geplatzt. Das heißt, beide Ballons müssen ein Volumen von $\frac{1}{2}$ oder weniger haben. Die Ballons sind dann jedoch sicher beide auf $\frac{1}{2}$ aufgeblasen, da keiner der Ballons vorher platzt und dies den erwarteten Gewinn sicher steigert. Aber auch $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ ist kein optimaler Endzustand: Man kann versuchen, einen Ballon weiter aufzublasen. Falls der Ballon beim Überschreiten von $\frac{1}{2}$ platzt, was mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ passiert, ist der andere Ballon sicher der Ballon

mit Volumen 1, und kann bis 1 aufgeblasen werden, und der optimale Endzustand ist dann $\{1\}$. Falls der erste Ballon nicht platzt, was auch mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ passiert, wird er bis 1 aufgeblasen; zusammen mit dem anderen Ballon ergibt sich der Endzustand $\{1, \frac{1}{2}\}$, also ein Gesamtvolumen von $\frac{3}{2}$. Insgesamt ist unser erwarteter Gewinn hier $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$, was mehr ist als 1, somit war $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ kein optimaler Endzustand. Insgesamt ist also in jedem optimalen Endzustand, also in $\{1\}$ sowie in $\{1, \frac{1}{2}\}$, der Ballon mit Volumen 1 komplett aufgeblasen.

6. Ist **richtig**.

   Eine optimale Strategie ist folgende: Versuche, einen der Ballons auf 1 aufzublasen. Falls das klappt, was mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ der Fall ist, blase den anderen Ballon auf $\frac{1}{2}$ auf. Falls das nicht klappt, auch mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, so platzt der erste Ballon beim Überschreiten von $\frac{1}{2}$, dann kann der andere Ballon auf 1 aufgeblasen werden. Jede optimale Strategie in Standardkartons der Größe 2 erreicht den Endzustand $\{1\}$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ und den Endzustand $\{1, \frac{1}{2}\}$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Die Argumentation ist ähnlich wie in Antwortmöglichkeit 5.

7. Ist **richtig**.

   Eine mögliche Strategie für Standardkartons der Größe 3 ist folgende: Wähle einen beliebigen Ballon aus, blase ihn zunächst auf $\frac{1}{3}$ auf, und lege ihn an die Seite. Verfahre mit den anderen beiden Ballons so wie in der Strategie in Antwortmöglichkeit 6.
   Fall 1: Beim Aufblasen der zwei nicht zur Seite gelegten Ballons platzt einer der beiden beim Überschreiten von $\frac{1}{3}$. Dann nimm stattdessen den Ballon, welchen du vorher auf die Seite gelegt hast, und folge der Strategie weiter - du hast dann sicher die Ballons der Größe 1 und $\frac{1}{2}$, da der Ballon der Größe $\frac{1}{3}$ schon geplatzt ist, und erreichst daher einen erwarteten Gewinn von $\frac{5}{4}$, also genau so viel, wie bei einem Standardkarton der Größe 2.
   Fall 2: Falls jedoch kein Ballon beim Überschreiten von $\frac{1}{3}$ platzt, so erreichst du auch den erwarteten Gewinn von $\frac{5}{4}$ mit den beiden nicht zur Seite gelegten Ballons, und zusätzlich $\frac{1}{3}$ von dem zur Seite gelegten Ballon. In diesem Fall ist der Gewinn also höher als bei einem Standardkarton der Größe 2. Da Fall 2 auftreten kann, nämlich mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$, ist auch der gesamte erwartete Gewinn bei dieser Strategie größer als bei einem Standardkarton der Größe 2.

8. Ist **falsch**.

   Ein Standardkarton mit Größe 2, bei welchem bekannt ist, welcher Ballon der Ballon mit Volumen $\frac{1}{2}$ ist, hat einen optimalen erwarteten Gewinn von $\frac{3}{2}$: Wenn der Ballon mit Volumen $\frac{1}{2}$ bekannt ist, so kann er komplett aufgeblasen werden, und dann muss der andere Ballon ein Volumen von 1 haben, und kann auch komplett aufgeblasen werden. Insgesamt also $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Eine optimale Strategie für den Karton $\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$ ist folgende: Versuche, einen Ballon auf 1 aufzublasen. Falls das klappt, blase die anderen beiden Ballons auf $\frac{1}{3}$ auf; das Gesamtvolumen in diesem optimalen Endzustand $\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$ ist $\frac{5}{3}$. Ansonsten versuche den nächsten Ballon auf 1 aufzublasen. Falls das klappt, so blase den dritten Ballon auf $\frac{1}{3}$ auf; das Gesamtvolumen in diesem optimalen Endzustand $\{1, \frac{1}{3}\}$ ist $\frac{4}{3}$. Falls das nicht klappt, so blase den dritten Ballon auf 1 auf; das Gesamtvolumen in diesem optimalen Endzustand $\{1\}$ ist 1. Jeder dieser drei Endzustände wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ erreicht. Diese Strategie ist optimal, da es an keiner Stelle Sinn ergibt, früher mit dem Aufblasen aufzuhören, da der erwartete Gewinn immer weiter gesteigert werden kann; alle anderen Aufblasmöglichkeiten, mit welchen der erwartete Gewinn gesteigert werden kann, sind lediglich zyklische Vertauschungen der Ballons, und ändern daher nichts am erwarteten Gewinn, da die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Ballon platzt, gleich bleibt. Es ergibt sich somit insgesamt ein erwarteter Gewinn von $\frac{4}{3}$, was weniger ist als $\frac{3}{2}$.

9. Ist **richtig**.

   Lediglich mit Aufblasen eines der Ballons, welche im Moment auf $\frac{1}{4}$ aufgeblasen sind, kann der erwartete Gewinn eventuell gesteigert werden. Einer dieser Ballons ist der Ballon mit Volumen $\frac{1}{3}$, der andere mit Volumen $\frac{1}{4}$ (da der Ballon mit Volumen 1 bereits aufgeblasen, und jener mit Volumen $\frac{1}{2}$ bereits geplatzt ist). Wenn man nun einen der Ballons versucht, auf $\frac{1}{3}$ aufzublasen, so ergeben sich zwei Möglichkeiten. Fall 1: mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ platzt der Ballon bei $\frac{1}{4}$; dann kann der andere Ballon auf $\frac{1}{3}$ aufgeblasen werden, der optimale Endzustand ist $\{1, \frac{1}{3}\}$. Fall 2: mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ kann der Ballon auf $\frac{1}{3}$ aufgeblasen werden; der optimale Endzustand ist $\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$. Der erwartete Gewinn beträgt also bei weiter aufblasen: $\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{35}{24}$. Dies ist jedoch weniger als $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{36}{24}$, welches der erwartete Gewinn ist, wenn man nicht weiter aufbläst.

10. Ist **richtig**.

    Man kann den erwarteten Gewinn steigern: Die beiden Ballons, welche im Moment auf $\frac{1}{4}$ aufgeblasen sind, sind die Ballons mit Volumen $\frac{1}{2}$ und Volumen $\frac{1}{4}$ (da der Ballon mit Volumen 1 bereits aufgeblasen, und jener mit Volumen $\frac{1}{3}$ bereits geplatzt ist). Man kann nun versuchen, einen der Ballons auf $\frac{1}{2}$ aufzublasen, so ergeben sich zwei Möglichkeiten.
    Fall 1: Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ platzt der Ballon beim Überschreiten von $\frac{1}{4}$; dann kann der andere Ballon auf $\frac{1}{2}$ aufgeblasen werden, der optimale Endzustand ist $\{1, \frac{1}{2}\}$.
    Fall 2: Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ kann der Ballon auf $\frac{1}{2}$ aufgeblasen werden; der optimale Endzustand ist $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$. Der erwartete Gewinn beträgt also bei weiterem Aufblasen: $\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{13}{8}$. Dies ist echt mehr als $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{12}{8}$, welches der erwartete Gewinn ist, wenn man nicht weiter aufbläst.

9 Streik der Geschenkeverpacker

Autor: Stephan Schwartz

Lösung

Richtige Lösung: Antwort 2

Logisch:

Berechnen wir zunächst die Startverteilung, also die Wahrscheinlichkeitsverteilung, die angibt wo sich Ottokar nach zwei Minuten aufhält.

Kreuzung	10	15	12	6	4
W-keit	$\frac{19}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$

Jetzt schließen wir einige Möglichkeiten aus:

- **Antwort 3 ist falsch:**
  Aufgrund der Symmetrie sind 7 und 8 gleich gut.

- **Antwort 5 ist falsch:**
  Die Wahrscheinlichkeit, Ottokar sofort zu erwischen, ist auf 4 und 6 gleich. Da die 6 ansonsten aber *nur* über die 5, und die 4 *auch* über die 5 erreicht werden kann, ist Kreuzung 4 besser als Kreuzung 6.

- **Antwort 6 ist falsch:**
  Kreuzung 1 ist offensichtlich schlechter ist als 4.

Mit Blick auf die Startverteilung gilt für die optimale Positionierung:

- $1, 2, 3$ und 4 sind offensichtlich schlechter als die 5: Wenn Ottokar auf der 6 oder auf der 10 startet (Wahrscheinlichkeit $\frac{22}{36}$), dann ist Kreuzung 5 deutlich besser als die anderen Kreuzungen. Startet Ottokar auf $4, 12$ oder 15, so ist die 5 höchstens geringfügig schlechter.

- $6, 7, 8$ und 9 sind offensichtlich schlechter als die 10.

- $12, 13, 14$ und 16 sind offensichtlich schlechter als die 11.

Als Kandidaten für die optimale Kreuzung bleiben also $5, 10, 11$ und 15. Jetzt wird ausgenutzt, dass genau eine Antwort richtig ist.

- Angenommen, 10 ist optimal. Dann sind die Antworten 4 *und* 9 richtig. Widerspruch!
- Angenommen, 11 ist optimal. Dann sind die Antworten 1 *und* 8 richtig. Widerspruch!
- Angenommen, 15 ist optimal. Dann sind die Antworten 7 *und* 10 richtig. Widerspruch!

Also ist Kreuzung 5 optimal und somit **ist Antwort 2 richtig.**

als Markovprozess:

Sei P die Übergangsmatrix des zugehörigen random walks auf dem Graphen, also $P = (p_{ij})$ mit $p_{ij} = \frac{1}{deg(i)}$. Betrachte $e_{10} \in \mathbb{R}^{16}$, also

$$e_{10}^T = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Dann ist die Startverteilung $x_0^T := e_{10}^T \cdot P^2$. Wir berechnen jetzt für jeden Knoten v den Vektor k^v der mean hitting times. Das bedeutet, dass $k_u^v := (k^v)_u$ die erwartete Anzahl an Schritten ist, um von Knoten u zu Knoten v zu gelangen. Hierzu lösen wir für jedes v das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} k_v^v &= 0 \\ k_u^v &= 1 + \sum_i k_i^v \cdot p_{ui} \qquad\qquad \forall u \neq v \end{aligned}$$

Da unsere Übergangsmatrix vollen Rang hat, ist dieses eindeutig lösbar. Die mittlere Wartezeit bei Knoten v ergibt sich somit als $t^v := x_0^T \cdot k^v$. Für $t = (t^v)$

ergibt sich dann:

$$t \approx \begin{pmatrix} 28.303 \\ 29.153 \\ 16.269 \\ 19.235 \\ 11.012 \\ 46.178 \\ 74.845 \\ 74.845 \\ 58.333 \\ 13.333 \\ 16.513 \\ 29.903 \\ 27.914 \\ 36.062 \\ 13.233 \\ 23.716 \end{pmatrix}$$

und daher die Reihenfolge:

$$5 \succ 15 \succ 10 \succ 3 \succ 11 \succ 4 \succ 16 \succ 13 \succ 1 \succ 2 \succ 12 \succ 14 \succ 6 \succ 9 \succ 7 = 8$$

10 Schneeburg

Autoren:
Hajo Broersma (Universiteit Twente), Cor Hurkens (TU Eindhoven)

Lösung

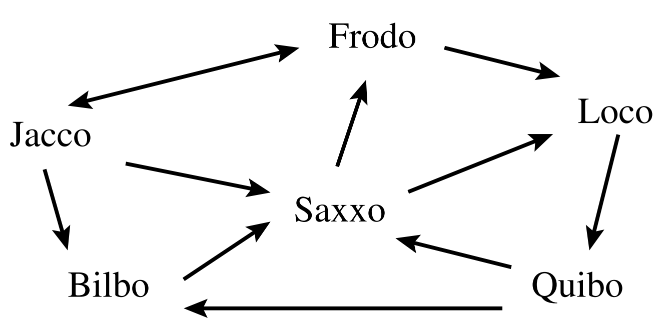
Die richtige Antwortmöglichkeit ist:

9. Quibo war in der Ostburg und Rambo in der Nordburg.

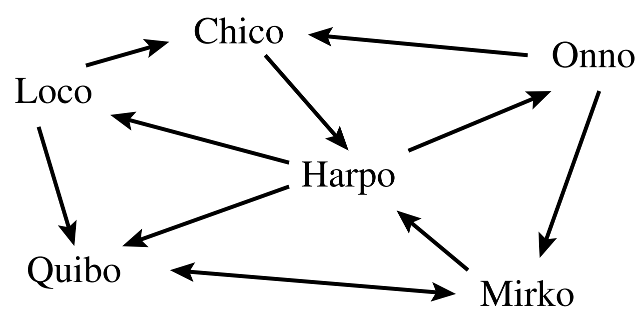
Erläuterung:

In den folgenden Bildern bedeutet ein Pfeil von Wichtel X zu Wichtel Y, dass X einen Schneeball auf Y geworfen hat. Dies impliziert natürlich, dass X und Y zu zwei verschiedenen Burgen gehören.

(1) Wir betrachten die sechs Wichtel Bilbo, Frodo, Jacco, Loco, Quibo und Saxxo, und wir nehmen zwecks Widerspruchs an, dass diese sechs in nur *drei* verschiedenen Burgen sitzen. Saxxo sitzt dann in einer Burg 1. Da die anderen fünf Wichtel mit Saxxo gekämpft haben, müssen sie alle aus nur zwei Burgen kommen:
Frodo sitzt dann in einer Burg 2.
Jacco hat nach Frodo geworfen und ist daher in Burg 3.
Da Jacco auch nach Bilbo geworfen hat, ist Bilbo in Burg 2.
Da Bilbo von Quibo getroffen wurde, sitzt Quibo in Burg 3.
Loco hat mit Saxxo (Burg 1), Frodo (Burg 2) und Quibo (Burg 3) gekämpft, und kann daher in keiner der drei Burgen sein. Widerspruch. Wir schlussfolgern: Einer der sechs Wichtel Bilbo, Frodo, Jacco, Loco, Quibo und Saxxo ist der Verteidiger der Ein-Mann-Burg im Osten.



(2) Als nächstes betrachten wir die sechs Wichtel Chico, Harpo, Loco, Mirko, Onno und Quibo. Wir können analog zu (1) folgern, dass diese sechs Wichtel alle vier Burgen abdecken müssen: Harpo hat mit allen fünf anderen gekämpft, und die Kämpfe der anderen fünf bilden einen Kreis um Harpo. Wir schlussfolgern: Einer der sechs Wichtel Chico, Harpo, Loco, Mirko, Onno und Quibo verteidigt die Ein-Mann-Burg im Osten.

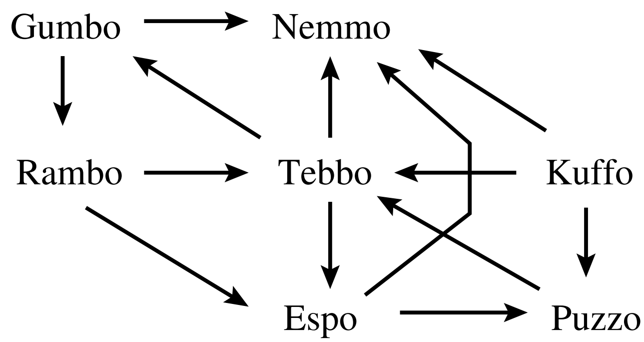


(3) Da sich die Wichtelmengen in (1) und (2) nur in den Wichteln Loco und Quibo überlappen, kommen nur noch Loco und Quibo für die Ostburg in Frage.

(4) Nun betrachten wir die sieben Wichtel Espo, Gumbo, Kuffo, Nemmo, Puzzo, Rambo und Tebbo. Da laut (3) keiner dieser sieben in der Ostburg sitzt, kommen sie alle aus den anderen drei Burgen. Tebbo sitzt in einer Burg 1 und hat mit den sechs anderen Wichteln gekämpft. Die anderen sitzen daher in zwei Burgen 2 und 3. Da ihre Kämpfe einen Kreis (Rambo, Gumbo, Nemmo, Kuffo, Puzzo, Espo, und wieder Rambo) bilden, müssen sie abwechselnd aus Burg 2 und Burg 3 kommen. Damit bilden diese Wichtel drei Gruppen mit 1, 3, 3 Mitgliedern, die in drei verschiedenen Burgen (Nord, West, Süd) sitzen:

Tebbo   Espo/Gumbo/Kuffo   Nemmo/Puzzo/Rambo

Keine der beiden Dreiergruppen kann in der Südburg sitzen: Die Südburg bietet nur drei Wichteln Platz, und laut (1) sitzt dort auch noch einer der Wichtel Bilbo, Frodo, Jacco, Loco, Quibo und Saxxo. Daher muss Tebbo in der Südburg sein; Espo/Gumbo/Kuffo sitzen in einer der großen Burgen (Nordburg oder Westburg) und Nemmo/Puzzo/Rambo sitzen in der anderen großen Burg.



(5) Jacco und Saxxo kämpfen einerseits gegeneinander und andererseits gegen Bilbo, Chico und Frodo; daher sind Bilbo, Chico und Frodo in derselben Burg. Harpo und Onno kämpfen einerseits gegeneinander und andererseits gegen Chico, Izzo und Mirko; daher sind Chico, Izzo und Mirko in derselben Burg.
Wir fassen zusammen: Die fünf Wichtel Bilbo, Chico, Frodo, Izzo und Mirko sind alle in derselben Burg (Nord oder West).

(6) Unter (4) und (5) haben wir drei Wichtelgruppen identifiziert, die jeweils gemeinsam in der Nordburg oder Westburg kämpfen.

Dreiergruppe 1:	Espo, Gumbo, Kuffo
Dreiergruppe 2:	Nemmo, Puzzo, Rambo
Fünfergruppe:	Bilbo, Chico, Frodo, Izzo, Mirko

Da Espo Schneebälle auf Nemmo und auf Bilbo wirft, müssen die Dreiergruppe 2 und die Fünfergruppe zusammen in der Nordburg sein; das ist nämlich die einzige Burg, in der acht Wichtel Platz haben. Dreiergruppe 1 sitzt folglich in der Westburg.

(7) Nun betrachten wir Harpo und Saxxo. Harpo kämpft mit Chico (Nord) und Gumbo (West); daher ist Harpo in der Südburg. Saxxo kämpft mit Frodo (Nord) und Kuffo (West); daher ist Saxxo ebenfalls in der Südburg. Wir fassen unter Verwendung von (4) zusammen: Die drei Wichtel in der Südburg sind Harpo, Saxxo und Tebbo.

(8) Atto sitzt laut (3) nicht in der Ostburg, sitzt laut (7) nicht in der Südburg, und hat nach Gumbo in der Westburg geworfen. Daher ist Atto der neunte und letzte Wichtel in der Nordburg. Wir fassen unter Verwendung von (6)

zusammen: Die neun Wichtel in der Nordburg sind Atto, Bilbo, Chico, Frodo, Izzo, Mirko, Nemmo, Puzzo und Rambo.

(9) Wir haben nun alle Wichtel in Nordburg und Südburg identifiziert. Laut (3) müssen mit der möglichen Ausnahme von Loco und Quibo alle verbleibenden Wichtel in der Westburg sein. Wir halten fest:
In der Westburg sitzen Dondo, Espo, Gumbo, Jacco, Kuffo und Onno.

(10) Da Quibo mit Dondo (West), Mirko (Nord) und Saxxo (Süd) kämpft, sitzt er alleine in der Ostburg. Und Loco gehört dann in die Westburg. Wir fassen die Aufteilung aller zwanzig Wichtel zusammen und sehen, dass nur Antwort Nr. 9 korrekt ist:

> Nordburg: Atto, Bilbo, Chico, Frodo, Izzo, Mirko, Nemmo, Puzzo, Rambo
> Südburg: Harpo, Saxxo, Tebbo
> Westburg: Dondo, Espo, Gumbo, Jacco, Kuffo, Loco, Onno
> Ostburg: Quibo

11 Die Uhr mit dem roten Knopf

Autor: Onno Boxma (TU Eindhoven)

Lösung

Die richtige Antwortmöglichkeit ist:

9. $p(2) = p(6)$

Erläuterung:

Da der erste Sprung (und auch jeder weitere Sprung) mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu einem der beiden jeweiligen Nachbarn geht, sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass der Zeiger schlussendlich auf der Zahl i stehen bleibt ($1 \leq i \leq 12$),symmetrisch bezüglich der Geraden durch 12 und 6 angeordnet. Daher gilt:

$$p(1) = p(11) \quad p(2) = p(10) \quad p(3) = p(9) \quad p(4) = p(8) \quad p(5) = p(7) \tag{3}$$

Wir führen zwei weitere Gruppen von Wahrscheinlichkeiten ein:
Mit $q(i)$ ($1 \leq i \leq 12$) bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger schlussendlich auf der Zahl i stehen bleibt, unter der Bedingung, dass der erste Sprung von 12 nach 1 geht. Mit $r(i)$ ($1 \leq i \leq 12$) bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger am Ende auf der Zahl i stehen bleibt, unter der Bedingung, dass der erste Sprung von 12 nach 11 geht. Dann gilt natürlich:

$$q(1) = q(12) = 0 \quad \text{und} \quad r(11) = r(12) = 0 \tag{4}$$

Aus Symmetriegründen gilt zudem:

$$q(2) = r(10) \quad q(3) = r(9) \quad q(4) = r(8) \quad \ldots\ldots \quad q(11) = r(1) \tag{5}$$

Und schließlich setzt sich jede Wahrscheinlichkeit $p(i)$ aus den beiden Wahrscheinlichkeiten $q(i)$ und $r(i)$ zusammen:

$$p(i) \;=\; \frac{1}{2}(q(i) + r(i)) \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, 12. \tag{6}$$

Jetzt wollen wir noch eine letzte Gruppe von Wahrscheinlichkeiten definieren. Dazu betrachten wir einen Hilfsprozess, in dem der Zeiger zuerst von 12 nach 1 springt, sodann seine üblichen Sprünge macht, und erst dann stehen bleibt, wenn er jede der Zahlen mindestens einmal und die Zahl 12 mindestens *zweimal* besucht hat. In anderen Worten: Der Zeiger startet in 12, geht nach 1, und muss danach jede der Zahlen $2, 3, \ldots, 11$ mindestens einmal und die Zahl 12 noch mindestens ein zweites Mal besuchen. Mit $s(i)$ $(1 \leq i \leq 12)$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger am Ende dieses Hilfsprozesses auf der Zahl i stehen bleibt. Man sieht leicht, dass

$$s(2) = p(1) \quad s(3) = p(2) \quad s(4) = p(3) \quad \ldots\ldots \quad s(12) = p(11). \tag{7}$$

Und natürlich gilt auch $s(1) = p(12) = 0$. Wie verhalten sich die Wahrscheinlichkeiten $s(i)$ zu den Wahrscheinlichkeiten $q(i)$? Beide Prozesse beginnen mit dem Sprung von 12 nach 1. Beide Prozesse springen nach der selben Regel zu den Nachbarn weiter. Der einzige Unterschied liegt in der Abbruchbedingung.

- Wenn der alte Prozess *nicht* bei 11, sondern bei einer Zahl $i \neq 11$ endet, dann hat er die Zahl 12 zwischendurch besucht: Die Zahl $i + 1$ wurde dann nämlich zu einem früheren Zeitpunkt besucht, und dazu muss der Zeiger über die Zahl 12 gelaufen sein. Dies impliziert $q(i) = s(i)$ und mit (5) gilt daher $q(i) = p(i - 1)$ für $2 \leq i \leq 10$.

- Wenn der alte Prozess aber bei der Zahl 11 endet, dann wurde die Zahl 12 unter Umständen noch kein zweites Mal besucht. Der Hilfsprozess muss dann noch weiterlaufen. Dies impliziert $q(11) = s(11) + s(12)$. Mit (7) und (3) erhalten wir daraus $q(11) = p(1) + p(2)$.

Der Rest ist reine Rechenarbeit.

$$p(1) = p(11) = \frac{1}{2}(q(11) + r(11)) = \frac{1}{2}(p(1) + p(2) + 0) \quad \Longrightarrow \quad p(1) = p(2).$$

Zudem erhalten wir mit $q(2) = p(1) = p(2)$ und $r(2) = q(10) = p(9) = p(3)$, dass

$$p(2) = \frac{1}{2}(q(2) + r(2)) = \frac{1}{2}(p(2) + p(3)) \quad \Longrightarrow \quad p(2) = p(3).$$

Als nächstes erhalten wir mit $q(3) = p(2) = p(3)$ und $r(3) = q(9) = p(8) = p(4)$, dass

$$p(3) = \frac{1}{2}(q(3) + r(3)) = \frac{1}{2}(p(3) + p(4)) \quad \Longrightarrow \quad p(3) = p(4).$$

Schließlich erhalten wir mit $q(4) = p(3) = p(4)$ und $r(4) = q(8) = p(7) = p(5)$, dass

$$p(4) = \frac{1}{2}(q(4) + r(4)) = \frac{1}{2}(p(4) + p(5)) \quad \Longrightarrow \quad p(4) = p(5).$$

Und zu guter Letzt bekommen wir mit $q(5) = p(4) = p(5)$ und $r(5) = q(7) = p(6)$, dass

$$p(5) = \frac{1}{2}(q(5) + r(5)) = \frac{1}{2}(p(5) + p(6)) \quad \Longrightarrow \quad p(5) = p(6).$$

Zusammenfassend ergibt dies das überraschende Ergebnis, dass alle elf Wahrscheinlichkeiten $p(1), \ldots, p(11)$ exakt gleich groß und somit (da p(12) = 0) alle gleich 1/11 sind. Nur Antwort 9. ist korrekt.

12 Weihnachtskugeln in verschiedenen Höhen

Autor: Merlijn Staps

Lösung

Die richtige Antwortmöglichkeit ist:

3. 32 silberne Kugeln

Erläuterung:

Wir zeigen, daß 32 silberne Kugeln die minimale Anzahl ist. Sei n die Gesamtzahl der silbernen und goldenen Kugeln.

Wir zeigen erst $n \geq 43$. Sei x_1 der Höhenunterschied (in Dezimetern) zwischen der höchsten und der zweithöchsten Kugel, x_2 der Höhenunterschied zwischen der zweithöchsten und der dritthöchsten Kugel usw. Dann gilt $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$, außerdem ist $x_1 > 0$ und $x_{n-1} < 1$. Wir können davon ausgehen, dass die höchste Kugel golden ist, denn alle silbernen Kugeln, die höher als die höchste goldene Kugel hängen, könnten die Wichtel weglassen. Sei S_k der Höhenunterschied zwischen der höchsten Kugel und der $(k+1)$-ten Kugel von oben, also $S_k = x_1 + \cdots + x_k$. Der Höhenunterschied zwischen der höchsten Kugel und jeder goldenen Kugel ist eine ganze Zahl. Für jede der 10 anderen goldenen Kugeln ist gibt es also ein S_{k_i}, $i = 1, \ldots, 10$, das ganzzahlig ist.

Wir bilden Blöcke aufeinanderfolgender x_k in folgender Weise: Block 1 besteht aus x_1 bis x_{k_1}, und für $i > 1$ besteht Block i aus $x_{k_{i-1}+1}$ bis x_{k_i}. Die Summe der Zahlen x_k in jedem dieser 10 Blöcke ist eine ganze Zahl, nämlich S_{k_1} in Block 1 und $S_{k_i} - S_{k_{i-1}}$ in Block i mit $i > 1$. Für jeden Block berechnen wir das arithmetische Mittel a_i, $i = 1, \ldots, 10$, der Zahlen x_k in diesem Block. Dieses Mittel ist eine rationale Zahl zwischen 0 und 1 und die a_i sind paarweise verschieden, denn es gilt $a_i > a_j$ für $i > j$. Kürzt man den Bruch a_i so weit wie möglich, dann ist sein Nenner nicht größer als die Anzahl der Zahlen in Block i.

Wir schreiben jetzt die rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 (in so weit wie möglich gekürzter Form) in einer Folge mit nicht fallendem Nenner:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \ldots$$

Da die a_i paarweise verschieden sind, ist die Summe der Anzahlen der Zahlen in den zehn Blöcken mindestens $2+3+3+4+4+5+5+5+5+6 = 42$. Also $n - 1 \geq 42$, d.h. es werden mindestens 32 silberne Kugeln gebraucht.

Wir zeigen jetzt, dass 32 silberne Kugeln tatsächlich ausreichen. Die erste goldene Kugel hängt auf 5 dm Höhe. Die Wichtel können dann die Kugeln zunächst in folgender Weise aufhängen , ohne dabei schon zu berücksichtigen, dass die Höhenunterschiede strikt fallen sollen:

- 5 Kugeln, jede $\frac{4}{5}$ dm höher als die vorige (die letzte hängt in 9 dm Höhe und ist golden);
- 4 Kugeln, jede $\frac{3}{4}$ dm höher als die vorige (die letzte hängt in 12 dm Höhe und ist golden);
- 3 Kugeln, jede $\frac{2}{3}$ dm höher als die vorige (die letzte hängt in 14 dm Höhe und ist golden);
- 5 Kugeln, jede $\frac{3}{5}$ dm höher als die vorige (die letzte hängt in 17 dm Höhe und ist golden);
- 2 Kugeln, jede $\frac{1}{2}$ dm höher als die vorige (die letzte hängt in 18 dm Höhe und ist golden);
- 5 Kugeln, jede $\frac{2}{5}$ dm höher als die vorige (die letzte hängt in 20 dm Höhe und ist golden);
- 3 Kugeln, jede $\frac{1}{3}$ dm höher als die vorige (die letzte hängt in 21 dm Höhe und ist golden);
- 4 Kugeln, jede $\frac{1}{4}$ dm höher als die vorige (die letzte hängt in 22 dm Höhe und ist golden);
- 5 Kugeln, jede $\frac{1}{5}$ dm höher als die vorige (die letzte hängt in 23 dm Höhe und ist golden);

- 6 Kugeln, jede $\frac{1}{6}$ dm höher als die vorige (die letzte hängt in 24 dm Höhe und ist golden).

Dann haben sie insgesamt 11 goldene und $5+4+3+5+2+5+3+4+5+6-10 = 32$ silberne Kugeln an den Baum gehängt. Wegen

$$\frac{4}{5} > \frac{3}{4} > \frac{2}{3} > \frac{3}{5} > \frac{1}{2} > \frac{2}{5} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6}$$

können sie die Positionen der silbernen Kugeln ein wenig verändern, so dass die Folge der Höhenunterschiede danach strikt fallend ist.

Die dritte Antwortmöglichkeit ist also richtig.

13 Nachbarschaftsstreit

Autoren:
André Nichterlein (TU Berlin, Lehrstuhl Algorithmik und Komplexitätstheorie),
Christian Hercher (FSU Jena, Lehrstuhl Theoretische Informatik I)

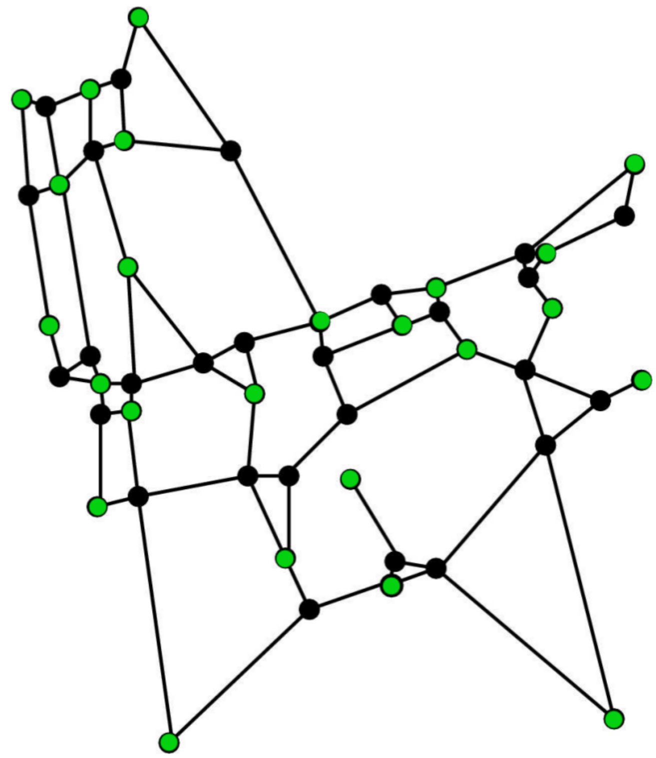
Lösung

Die richtige Antwortmöglichkeit ist:

4 R1 und R3 sind richtig, R2 dagegen ist falsch.

Erläuterung:

Um das einzusehen, überlegen wir uns, dass bei drei Wichteln, die jeweils paarweise im Streit liegen, auf jeden Fall zwei gehen müssen. Denn blieben zwei, wäre der Streit zwischen ihnen nicht aufgelöst. Seien einmal A, B und C diese drei Wichtel, wobei C nur mit A und B verfeindet ist. Dann würde ein Entfernen von C nur dessen beide Konflikte mit A und B auflösen, auf keinen Fall weitere (da C ja an keinem weiteren beteiligt ist). Bei A und B dagegen werden auch deren Streits mit C beseitigt, wenn man sie nach Hause schickt, möglicherweise aber eben auch weitere. Da dieses Vorgehen nie schlechter ist, als C wegzuschicken, kann man immer der Einfachheit halber A und B gehen lassen; unabhängig davon, ob diese noch in weiteren Feindschaften involviert sind, oder nicht. Also sind Regeln R1 und R3 richtig.
Bei Regel R2 ist die Situation etwas anders: Hier wären A und B - um in der Bezeichnung zu bleiben - nicht auch untereinander verfeindet. Ein Gegenbeispiel zu dieser Regel erhält man z.B., wenn A und B beide in Zwist mit einem Wichtel X liegen, der als weiteren Feind den sonst mit allen anderen umgänglichen Wichtel D besitzt. In dieser Konstellation genügt es X und C nach Hause zu schicken um alle Konflikte zu lösen. Im Optimum sind also hier nur zwei Wichtel nicht im Einsatz. Würde man aber nach Regel (R2) verfahren und A und B nach Hause schicken, gäbe es immer noch den ungelösten Konflikt zwischen X und D, sodass noch mindestens ein weiterer Wichtel gehen müsste. Also ist R2 falsch.
Eine optimale Auswahl gemeinsam arbeitsfähiger Wichtel sieht man in der Abbildung. (Es sind die grün eingefärbten.)



Dies sind 27 Wichtel, sodass weder Antwortmöglichkeit 1 noch 10 korrekt sind. (Man hätte auch dadurch, das genau eine der Antwortmöglichkeiten 2 bis 9 richtig sein muss, darauf schließen können, dass diese zwei falsch sind. Es ist ja auch insgesamt nur genau eine Antwort korrekt.)

14 Weinkeller

Autor: Cor Hurkens (TU Eindhoven)

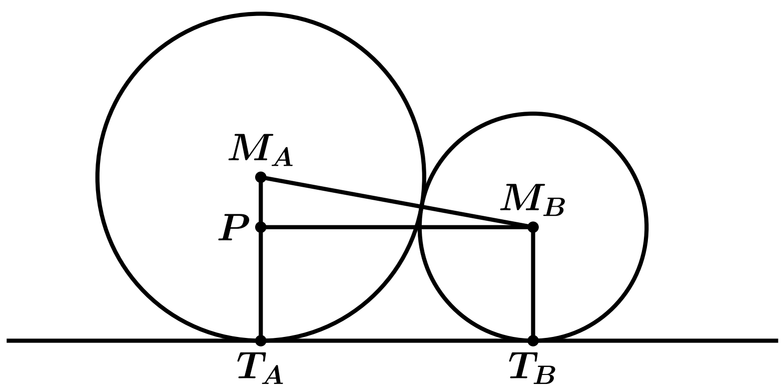
Lösung

Die richtige Antwortmöglichkeit ist:

5 Ungefähr 10 **Meter**

Erläuterung:

Wir leiten zunächst ein Hilfsresultat her. Es seien K_A und K_B zwei Kreise, die einander berühren und die x-Achse als gemeinsame Tangente haben. Die beiden Mittelpunkte seien M_A und M_B, ihre Radien seien r_A und r_B mit $r_A \geq r_B$, und die Tangentialpunkte auf der x-Achse seien T_A und T_B. Des Weiteren sei P die senkrechte Projektion des Punktes M_B auf die Gerade durch M_A und T_A.



Das Dreieck $M_A M_B P$ hat die Seitenlängen $|M_A M_B| = r_A + r_B$ und $|M_A P| = r_A - r_B$, und außerdem einen rechten Winkel beim Eckpunkt P. Der Satz von Pythagoras liefert dann $|PM_B| = 2\sqrt{r_A\, r_B}$. Der Abstand der beiden Tangentialpunkte beträgt daher $|T_A T_B| = 2\sqrt{r_A\, r_B}$; und das ist bereits unser Hilfsresultat.

Wir kehren nun in den Weinkeller zurück und projizieren die Fässer vertikal an die Wand (genau wie im Bild zum Aufgabentext). Der Fußboden wird dadurch im Bild zur x-Achse, und das Fass F_j $(1 \leq j \leq 101)$ wird zu einem Kreis K_j mit Radius r_j; den Tangentialpunkt dieses Kreises auf der

x-Achse bezeichnen wir mit T_j. Da jeder Kreis K_j den Kreis K_1 berührt, gilt laut Hilfsresultat $|T_1T_j| = 2\sqrt{r_1r_j}$ für $2 \le j \le 101$. Da jeder Kreis K_j zusätzlich den Kreis K_{j-1} berührt, gilt $|T_{j-1}T_j| = 2\sqrt{r_{j-1}r_j}$. Da der Punkt T_{j-1} zwischen den beiden Punkten T_1 und T_j liegt, gilt schließlich

$$|T_1T_j| \;=\; |T_1T_{j-1}| + |T_{j-1}T_j| \qquad\qquad \text{für } 3 \le j \le 101. \tag{8}$$

Auf Grund der obigen Beobachtungen ist (8) zur folgenden Gleichung äquivalent:

$$2\sqrt{r_1r_j} \;=\; 2\sqrt{r_1r_{j-1}} + 2\sqrt{r_{j-1}r_j} \qquad\qquad \text{für } 3 \le j \le 101. \tag{9}$$

Wir dividieren die beiden Seiten der Gleichung (9) durch $2\sqrt{r_1r_{j-1}r_j}$ durch und erhalten

$$\frac{1}{\sqrt{r_{j-1}}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{r_j}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}} \qquad\qquad \text{für } 3 \le j \le 101. \tag{10}$$

Wenn man die Gleichungen (10) über alle j mit $3 \le j \le 101$ aufaddiert, so kommen die meisten Terme sowohl auf der linken als auch auf der rechten Seite vor und heben sich daher auf. Die resultierende Gleichung vereinfacht sich zu

$$\frac{1}{\sqrt{r_2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{r_{101}}} + 99 \cdot \frac{1}{\sqrt{r_1}}.$$

Mit $r_1 = 10$m und $r_2 = 10^{-3}$m errechnet man daraus $r_{101} = 10$m. Antwort #5 ist korrekt.

15 Schneeflocke

Autor: Oleh Omelchenko

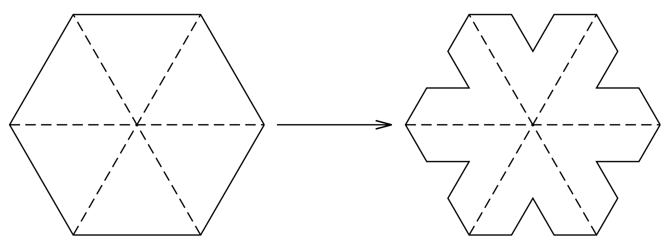
Lösung

Die richtige Antwortmöglichkeit ist:

3 Elf muss bis zum 3. Schritt gehen

Erläuterung:

Um die richtige Antwort zu finden, müssen wir zuerst die Fläche der Schneeflocke in jedem Schritt berechnen. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass die Fläche vom Ausgangssechseck gleich 1 ist. Dann rechnen wir wie groß die Stücke sind, die der Elf im ersten Schritt ausschneidet. Zu diesem Zweck ist es praktisch das Ausgangssechseck in sechs gleichseitige Dreiecke aufzuteilen.



Im ersten Schritt verliert jedes Dreieck einen Teil der auch ein gleichseitiges Dreieck ist aber mit 3 mal kürzerer Seitenlänge. Das bedeutet, dass die Fläche von einem ausgeschnittenen Dreieck 9 mal kleiner ist als die Fläche vom Ausgangsdreieck. Deswegen bekommt der Elf nach dem ersten Schritt eine Schneeflocke mit der Fläche

$$S_1 = 1 - \frac{1}{9}.$$

Im zweiten Schritt muss der Elf noch kleinere Dreiecke ausschneiden, die 9 mal kleinere Flächen als im ersten Schritt haben. Jetzt hat die Schneeflocke aber 4 mal mehr Seiten. Deshalb verändert sich die Fläche nach dem zweiten Schritt wie folgt

$$S_2 = S_1 - 4 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}.$$

Man sieht, dass der Elf jedes Mal neue Dreiecke ausschneiden muss, die 9 mal kleiner als zuvor sind und dass die Zahl der Dreiecke im Vergleich zum vorherigen Schritt um 4 steigt . Nach dieser Regel können wir eine Formel für die Schneeflockenfläche nach dem n-ten Schritt schreiben

$$S_n = 1 - \frac{1}{9}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

Die Summe auf der rechten Seite nennt man geometrische Reihe und es gibt einen einfachen Weg sie zu berechnen

$$\left(1-\frac{4}{9}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{4}{9}\right)^k = 1-\frac{4}{9}+\frac{4}{9}-\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2-\cdots-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}+\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}-\left(\frac{4}{9}\right)^n = 1-\left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

So bekommen wir

$$S_n = 1 - \frac{1}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}} = 1 - \frac{1}{5}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Dem Elf fehlt eine von sechs Farbtuben. Deshalb muss er so lange Dreiecke ausschneiden bis $S_n > 5/6$ bleibt. Diese Bedingung kann man auch anders formulieren

$$\left(\frac{4}{9}\right)^n > \frac{1}{6}.$$

Jetzt rechnen wir

$$\left(\frac{4}{9}\right)^1 > \frac{1}{6}, \qquad \left(\frac{4}{9}\right)^2 > \frac{1}{6}, \quad \text{aber} \quad \left(\frac{4}{9}\right)^3 < \frac{1}{6}.$$

Nach dem dritten Schritt reichen die fünf verbliebenen Farbtuben aus, um die ganze Figur zu bemalen.

16 Die Hochebene Xavia

Autor: Arne Roggensack

Lösung

Die richtige Antwortmöglichkeit ist:

2 Aussage e)

Erläuterung:

Zur Aussage e) kann man sich relativ einfach ein Gegenbeispiel überlegen: Wir bezeichnen mit (x_n, y_n) die Koordinaten nach dem n-ten Schritt. Für $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gilt $(x_1, y_1) = f(x_0, y_0) = (0,0)$ und $(x_2, y_2) = f(0,0) = (0,0)$ und somit für alle weiteren Schritte $(x_n, y_n) = f(x_{n-1}, y_{n-1}) = f(0,0) = (0,0)$.
Für alle anderen Aussagen (außer g)) reicht es aus, wenn wir Koordinaten angeben, die die Aussage erfüllen. Wir werden solche Beispiele im Folgenden systematisch konstruieren; für die Lösung der Aufgabe ist es allerdings auch ausreichend, Beispiele auf einem anderen Weg (z.B. durch Raten) zu finden. Für Aussage g) müssen wir begründen, warum die nördliche Seite des Sees nicht erreicht werden kann. Insbesondere braucht man, sobald man Aussage 5 als falsch erkannt hat, nur noch b), g) und h) zu prüfen. Trotzdem werden wir alle Aussagen beweisen.
Zunächst stellen wir fest, dass die Regel für f deutlich einfacher wird, wenn $x = y$ gilt, denn es gilt

$$f(x,x) = \begin{cases} (2x, 2x) & \text{falls } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ (2x-1, 2x-1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Also ist, wenn $x_0 = y_0$ gilt, auch $x_n = y_n$ für alle n. Deshalb betrachten wir zur Vereinfachung der Notation die Funktion

$$F(x) = \begin{cases} 2x & \text{falls } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \text{falls } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Die Koordinaten nach dem n-ten Schritt nennen wir also x_n.

Uns fällt auf, dass die Funktion F in beiden Fällen x auf die Nachkommastellen von $2x$ abbildet, d.h. wir können kurz schreiben $F(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor$, wobei die Klammern $\lfloor \cdot \rfloor$ bedeuten, dass wir die Zahl abrunden auf die nächstkleinere ganze Zahl.
Es gilt also

$$x_1 = F(x_0) = 2x_0 - \lfloor 2x_0 \rfloor$$

und

$$\begin{aligned} x_2 &= F(x_1) = F(2x_0 - \lfloor 2x_0 \rfloor) = 2\,(2x_0 - \lfloor 2x_0 \rfloor) - \lfloor 2(2x_0 - \lfloor 2x_0 \rfloor) \rfloor \\ &= 4x_0 - 2\lfloor 2x_0 \rfloor - (\lfloor 4x_0 \rfloor - 2\lfloor 2x_0 \rfloor) = 4x_0 - \lfloor 4x_0 \rfloor. \end{aligned}$$

Für das vorletzte Gleichheitszeichen haben wir benutzt, dass für jede ganze Zahl k und reelle Zahl x gilt $\lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$ (was man sich leicht überlegen kann). Ingesamt bedeutet dies also, dass x_2 gleich den Nachkommastellen von $4x_0$ ist. Man kann sich das auch ohne die Klammernotation überlegen:

$$x_2 = F(x_1) = F(F(x_0)) = \begin{cases} 2 \cdot 2x & \text{falls } 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 2(2x-1) & \text{falls } \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 2 \cdot 2x - 1 & \text{falls } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 2(2x-1) - 1 & \text{falls } \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} 4x & \text{falls } 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 4x-1 & \text{falls } \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 4x-2 & \text{falls } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 4x-3 & \text{falls } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Für x_3 erhält man analog $x_3 = 2x_2 - \lfloor 2x_2 \rfloor = (2 \cdot 2 \cdot 2)x_0 - \lfloor (2 \cdot 2 \cdot 2)x_0 \rfloor = 2^3 x_0 - \lfloor 2^3 x_0 \rfloor$. Allgemein gilt entsprechend $x_n = 2^n x_0 - \lfloor 2^n x_0 \rfloor$.
Mit Hilfe dieser Vorüberlegungen sind wir nun in der Lage, Beispiele für die einzelnen Aussagen zu konstruieren:

b). Wenn der Schlitten nach zwei Schritten wieder bei x_0 steht, aber nach einem Schritt an einem anderen Ort stand, bedeutet das, dass $x_2 = x_0$ und $x_1 \neq x_2$ gilt, d.h.

$$x_0 = x_2 = 4x_0 - \lfloor 4x_0 \rfloor$$

und damit

$$3x_0 = \lfloor 4x_0 \rfloor.$$

Das heißt, dass $3x_0$ eine ganze Zahl sein muss. Wegen $0 < x_0 < 1$ kommen nur 1 und 2 in Frage und in der Tat sind $x_0 = \frac{1}{3}$ und $x_0 = \frac{2}{3}$ Lösungen. Für x_1 gilt dann $x_1 = 2 \cdot \frac{1}{3} - \lfloor 2 \cdot \frac{1}{3} \rfloor = \frac{2}{3} \neq x_2$ bzw. $x_1 = 2 \cdot \frac{2}{3} - \lfloor 2 \cdot \frac{2}{3} \rfloor = \frac{1}{3} \neq x_2$.

c). Analog zur vorherigen Überlegung finden wir die Gleichung

$$x_0 = x_3 = 8x_0 - \lfloor 8x_0 \rfloor,$$

also

$$7x_0 = \lfloor 8x_0 \rfloor.$$

Das heißt $7x_0$ muss eine ganze Zahl sein, die wegen $0 < x_0 < 1$ zwischen 1 und 7 liegen muß. Da wir nicht an allen Lösungen interessiert sind, wählen wir z.B. 1. Damit ergibt sich $x_0 = \frac{1}{7}$ und es $x_1 = 2\frac{1}{7} - \lfloor 2\frac{1}{7} \rfloor = \frac{2}{7}$.

e). Jede Koordinate aus Aussage h) ist ein Gegenbeispiel für diese Aussage.

h). Zu $n > 1$ sind Koordinaten gesucht mit $x_n = 0$ und $x_k \neq 0$ für alle $k < n$. Unsere Formel ergibt

$$0 = x_n = 2^n x_0 - \lfloor 2^n x_0 \rfloor,$$

d.h.

$$2^n x_0 = \lfloor 2^n x_0 \rfloor.$$

Also muss $2^n x_0$ eine ganze Zahl sein; wir wählen $x_0 = \frac{1}{2^n}$, dann gilt $x_n = 0$ und $x_k = 2^k x_0 - \lfloor 2^k x_0 \rfloor = \frac{2^k}{2^n} - \lfloor \frac{2^k}{2^n} \rfloor$ für $k < n$. Wegen $k < n$ ist $2^k < 2^n$ und somit $0 < \frac{2^k}{2^n} < 1$. Daher folgt $x_k = \frac{2^k}{2^n} \neq 0$.

i). Für die letzte Aussage wiederholen wir die Überlegung aus Aussage b) und c) für allgemeines n. Es soll gelten

$$x_0 = x_n = 2^n x_0 - \lfloor 2^n x_0 \rfloor$$

und somit

$$(2^n - 1)x_0 = \lfloor 2^n x_0 \rfloor.$$

Also ist $(2^n - 1)x_0$ eine ganze Zahl und wir wählen $x_0 = \frac{1}{2^n - 1}$. Dann gilt nach Konstruktion $x_n = x_0$ und $x_1 = 2x_0 - \lfloor 2x_0 \rfloor = \frac{2}{2^n-1} - \lfloor \frac{2}{2^n-1} \rfloor$. Wegen $n > 1$ gilt dann $2^n - 1 \geq 3$ und somit $0 < \frac{2}{2^n-1} \leq \frac{2}{3}$. Also folgt

$$x_1 = \frac{2}{2^n - 1} \neq x_0.$$

a). Für Aussage a) reicht unsere vereinfachte Funktion F leider nicht aus, denn wenn der Schlitten sich nicht mehr bewegt, müsste $x_0 = x_1 = 2x_0 - \lfloor 2x_0 \rfloor$ gelten, also auch $x_0 = \lfloor 2x_0 \rfloor$. Insbesondere bedeutet das, dass x_0 eine ganze Zahl sein muss, was wegen $0 < x_0 < 1$ nicht möglich ist. Also müssen wir die Funktion f mit $x_0 \neq y_0$ betrachten. Man könnte auch für diese Funktion systematisch untersuchen, welche Koordinaten erreicht werden können. Ein eleganter Weg dafür nutzt die Binärdarstellung der Zahlen x und y. Für die Lösung der Aufgabe ist dies jedoch nicht erforderlich.

Da wir eben schon festgestellt haben, dass $x_0 \neq y_0$ gelten muss, versuchen wir $0 < x_0 < \frac{1}{2} \leq y_0 < 1$. Dann gilt $(x_0, y_0) = (x_1, y_1) = (2y_0 - 1, 2x_0)$. Dies impliziert

$$\begin{aligned} x_0 &= 2y_0 - 1 \\ y_0 &= 2x_0 \end{aligned}$$

und somit

$$x_0 = 2 \cdot 2x_0 - 1.$$

Also muss $x_0 = \frac{1}{3}$ und $y_0 = \frac{2}{3}$ gelten. Man überprüft leicht, dass diese Koordinaten tatsächlich $(x_1, y_1) = (x_0, y_0)$ erfüllen. Auch bei dem analogen Ansatz $0 < y_0 < \frac{1}{2} \leq x_0 < 1$ findet sich schnell ein Gegenbeispiel.

d). Auch für Aussage d) reicht es nicht aus mit der vereinfachten Funktion F zu arbeiten. Der wesentliche Unterschied von f zu F ist, dass die Funktion in den Bereichen $0 \leq x < \frac{1}{2} \leq y \leq 1$ und $0 \leq y < \frac{1}{2} \leq x \leq 1$ die „Koordinaten vertauscht". Deshalb kann man sich mit Hilfe des Ergebnisses aus c). leicht überlegen, dass z.B. $(\frac{1}{7}, \frac{2}{7})$ die Aussage d) erfüllt.

Übrigens gibt es kein Tupel (x_0, y_0) mit $x_0 \neq y_0$, so dass $(x_2, y_2) = (x_0, y_0)$ und $(x_1, y_1) \neq (x_0, y_0)$ gilt. Das heißt die entsprechende Aussage für $n = 2$ ist falsch.

f). Um im zweiten Schritt das westliche Ufer an der Stelle $(0, y_1)$ zu erreichen, muss im ersten Schritt entweder $y_0 = 1$ und $0 \leq x_0 < \frac{1}{2}$ mit $2x_0 = y_1$ oder $x_0 = 1$ und $\frac{1}{2} \leq y_0 \leq 1$ mit $y_1 = 2y_0 - 1$ gelten. Wir betrachten nur den ersten Fall und wählen $x_0 = \frac{y_1}{2}$. Also kann jeder Punkt des westlichen Ufers im zweiten Schritt erreicht werden.

g). Wenn der Schlitten im n-ten Schritt an der nördlichen Seeseite ankommt, muss gelten

$$(x_n, 1) = f(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Somit folgt entweder $0 \leq y_{n-1} < \frac{1}{2}$ und $2x_{n-1} - 1 = 1$ oder $\frac{1}{2} \leq x_{n-1} \leq 1$ und $2y_{n-1} - 1 = 1$. Im ersten Fall heißt das $x_{n-1} = 1$, so dass der Schlitten schon im Schritt zuvor an der nördlichen Seite angekommen war. Im zweiten Fall gilt $y_{n-1} = 1$ und man schließt analog das entweder $x_{n-2} = 1$ oder $y_{n-2} = 1$ sein muss. Man kann den nördlichen Rand also nur erreichen, wenn man in einem vorherigen Schritt am nördlichen oder östlichen Rand war. Da aber sowohl $x_0 < 1$ als auch $y_0 < 1$ gilt, kann das nie auftreten.

17 Weihnachtsstimmung

Autorinnen: Heide Hoppmann, Marika Karbstein
Projekt: B-MI3

Lösung

Die richtige Antwortmöglichkeit ist:

8 8 Einheiten Tannenzucker, 3 Einheiten Schneemehl und 1 Einheit Weihnachtssterngewürz

Erläuterung:

Wir berechnen zunächst den Stimmungsfaktor der Zutaten und den Weihnachtswert. Seien

- x_1 - Stimmungsfaktor von Tannenzucker
- x_2 - Stimmungsfaktor von Schneemehl
- x_3 - Stimmungsfaktor von Weihnachtssterngewürz
- W - Weihnachtswert

Aus den Aussagen von Theodor Lecker:
„Ich weiß nur noch, dass 5 Einheiten Tannenzucker, eine Einheit Schneemehl und 3 Einheiten Weihnachtssterngewürz exakt den Weihnachtswert ergeben. Außerdem überschreiten 1 Einheiten Tannenzucker. 2 Einheiten Schneemehl und 4 Einheiten Weihnachtssterngewürz den Weihnachtswert um 1, sorgen aber für Weihnachtsstimmung. Für Weihnachtsstimmung sorgen auch 3 Einheiten Tannenzucker, eine Einheit Schneemehl und 4 Einheiten Weihnachtssterngewürz; dabei wird der Weihnachtswert um 2 überschritten.“
können wir folgende Gleichungen herleiten:

$$\begin{array}{ll}
\text{(i)} & 5x_1 + 1x_2 + 3x_3 = W \\
\text{(ii)} & 1x_1 + 2x_2 + 4x_3 = W + 1 \\
\text{(iii)} & 3x_1 + 1x_2 + 4x_3 = W + 2
\end{array}$$

Da alle obigen Mischverhältnisse für Weihnachtsstimmung sorgen, gilt

$$x_1, x_2, x_3 > 2.$$

Sonst könnte man in Gleichung (iii) eine Zutat um eine Einheit reduzieren und würde immer noch den Weihnachtswert erreichen. Das folgt aus der Aussage:

„Erreicht der Stimmungsfaktor einen bestimmten Wert, den Weihnachtswert, so stellt sich eine Weihnachtsstimmung ein. Die Weihnachtsstimmung bleibt zunächst auch, wenn der Weihnachtswert überschritten wird, verfliegt aber sofort, wenn von einer – egal welcher – Zutat zuviel verwendet wurde. Zuviel bedeutet, dass, wenn man eine Einheit weniger der Zutat nähme und alle anderen Mengeneinheiten gleich ließe, der Weihnachtswert auch erreicht oder überschritten wäre.“

Weiterhin ergibt sich:

$$\begin{array}{lll} \text{(iii) } -\text{(ii):} & 2x_1 - x_2 = 1 & \Leftrightarrow x_2 = 2x_1 - 1 \\ \text{(iii)}-\text{(i):} & -2x_1 + x_3 = 2 & \Leftrightarrow x_3 = 2x_1 + 2 \end{array}$$

Da alle Stimmungsfaktoren einstellige, positive ganze Zahlen sind folgt $x_1 = 3$ ($x_1 = 1$ und $x_1 = 2$ wurden oben bereits ausgeschlossen und mit $x_1 \geq 4$ wäre x_3 bereits zweistellig). Damit folgt $x_2 = 5$, $x_3 = 8$ und $W = 44$. Nun kann man alle Antwortmöglichkeiten nachrrechnen und überprüfen:

1. $2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 8 = 45$
2. $4 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 = 46$
3. $3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 8 = 45$
4. $5 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 8 = 46$
5. $6 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 = 44$
6. $8 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 = 45$
7. $6 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 8 = 46$
8. $8 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 8 = 47 = W + 3$ (Tannenzucker kann um eine Einheit reduziert werden)
9. $9 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 8 = 45$
10. $11 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 8 = 46$

18 Granitblock

Autoren: Rudi Pendavingh (TU Eindhoven; rudi@win.tue.nl),
Frits Spieksma (KU Leuven; Frits.Spieksma@econ.kuleuven.be)

Lösung

Die richtige Antwortmöglichkeit ist:

4 Die vier Ecken legen gleich lange Wege zurück, und $a = b = c = d > e > f$

Erläuterung:

Wir betrachten zunächst einen beliebigen Punkt X auf der Vorderseite des Granitblocks. Da der erste Kippvorgang den Block um 90 Grad um den Punkt B dreht, bewegt sich X dabei auf einem Viertelkreis mit Mittelpunkt B und Radius $|BX|$. Während des zweiten (respektive dritten und vierten) Kippvorgangs bewegt sich X auf einem Viertelkreis mit Mittelpunkt C (respektive D und A) und Radius $|CX|$ (respektive $|DX|$ und $|AX|$). Die Gesamtlänge des Weges von X beträgt daher

$$\frac{1}{2}\pi|BX|+\frac{1}{2}\pi|CX|+\frac{1}{2}\pi|DX|+\frac{1}{2}\pi|AX| = \frac{1}{2}\pi(|BX|+|CX|+|DX|+|AX|).$$

Diese Gesamtlänge ist also zu $|AX|+|BX|+|CX|+|DX|$ proportional, das heißt proportional zur Summe der Abstände von X zu den vier Ecken A, B, C, D.
Setzen wir nun der Reihe nach $X = A, B, C, D, E, F$, so ergeben sich für diese Summe $|AX| + |BX| + |CX| + |DX|$ die folgenden sechs Werte:

$$\begin{array}{rcccl}
|AA| + |BA| + |CA| + |DA| & = & 0+3+5+4 & = & 12 \\
|AB| + |BB| + |CB| + |DB| & = & 3+0+4+5 & = & 12 \\
|AC| + |BC| + |CC| + |DC| & = & 5+4+0+3 & = & 12 \\
|AD| + |BD| + |CD| + |DD| & = & 4+5+3+0 & = & 12 \\
|AE| + |BE| + |CE| + |DE| & = & \sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{13}+\sqrt{10} & \approx & 10,42 \\
|AF| + |BF| + |CF| + |DF| & = & \sqrt{8}+\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{8} & \approx & 10,13
\end{array}$$

Daher ist Antwort #4 korrekt.

19 Summe und Produkt

Autoren:
Cor Hurkens (TU Eindhoven; c.a.j.hurkens@tue.nl)
Gerhard Woeginger (TU Eindhoven; gwoegi@win.tue.nl)

Lösung

Die richtige Antwortmöglichkeit ist:

9 $43 \leq y < 46$

Erläuterung:

(1) Wenn man sowohl das Produkt P als auch die Summe S kennt, kann man die beiden Zahlen x und y schnell ausrechnen: Sie sind die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 - Sz + P = 0$. Klugwichtel Summo kennt also x und y genau dann, wenn er das Produkt P kennt, und Klugwichtel Prodo kennt x und y genau dann, wenn er die Summe S kennt.

(2) Falls das Produkt P eine Primzahl ist, so kann Prodo sofort $x = 1$, $y = P$ und $S = P + 1$ schlussfolgern. Falls das Produkt P keine Primzahl ist, so hat P einen Teiler t mit $1 < t < P$; Prodo kann sich in diesem Fall nicht sicher sein, ob $x = 1$ und $y = P$ gilt oder ob $x = t$ und $y = P/t$ ist. Wir halten fest: Prodo kann die Summe S genau dann nicht bestimmen, wenn P keine Primzahl ist.

(3) Die erste Aussage von Summo („Du kannst die Summe S nicht bestimmen“) ist daher zu folgender Aussage äquivalent:

> ($*$) Wir suchen Summen S, so dass für alle natürlichen Zahlen x und y mit $1 \leq x \leq y$ und $x + y = S$ gilt, dass das Produkt xy keine Primzahl ist.

Falls zwei ganze Zahlen x und y mit $x + y = S$ die Ungleichung $2 \leq x \leq y$ erfüllen, so ist ihr Produkt xy trivialerweise nicht prim (da $x \geq 2$ und $y \geq 2$ gilt). Um geeignete Summen zu finden, deren Zerlegungen in zwei Summanden x, y alle ($*$) erfüllen, reicht es somit den Fall zu betrachten, dass einer der Summanden 1 ist. Aussage ($*$) ist also zu folgender Aussage äquivalent:

> ($**$) Wir suchen Summen S, so dass für alle natürlichen Zahlen x und y mit $1 \leq x \leq y$ und $x + y = S$ und $x = 1$ gilt, dass das Produkt xy keine Primzahl ist.

Da nun $x = 1$ fixiert ist, bleibt für y nur noch der Wert $y = S - 1$ übrig. Aussage ($**$) vereinfacht sich damit zur folgenden Aussage ($***$) über das Produkt $1 \cdot (S - 1)$:

> ($***$) Wir suchen Summen S, so dass $S - 1$ keine Primzahl ist.

(4) Als Nächstes wollen wir die Teiler $1 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ des Produkts P betrachten, die kleiner gleich $\sqrt{P}$ sind. Vor Summos erster Aussage weiß Prodo einzig und allein, dass die Summe S unter den Kandidatensummen $S_k = t_k + P/t_k$ mit $1 \leq k \leq n$ zu finden ist.
Durch Summos erste Aussage und sein Wissen über P kann Prodo $n - 1$ dieser Kandidatensummen eliminieren und zu seiner Aussage „Jetzt weißich, dass $S = 46$ ist." kommen. Wie ist das möglich? Laut ($***$) kann Prodo eine Kandidatensumme S_k genau dann eliminieren, wenn $S_k - 1$ eine Primzahl ist. Daher müssen $n - 1$ dieser Werte $S_1 - 1, S_2 - 1, \ldots, S_n - 1$ Primzahlen sein. Wir wissen bereits aus (2), dass $P = (1 + P/1) - 1 = S_1 - 1$ nicht prim ist. Daher müssen die restlichen Werte $S_2 - 1, \ldots, S_n - 1$ samt und sonders Primzahlen sein, und die einzige verbleibende Kandidatensumme ist $S = P + 1$.

(5) Prodos Aussage bedeutet nun, dass $S = 46 = P + 1$ ist. Dies impliziert $P = 45$, $x = 1$ und $y = 45$, sodass Antwort #9 korrekt ist.
Man kann nun noch Prodos Schlussfolgerungen für $P = 45$ verifizieren. Die möglichen Faktorisierungen von 45 sind $1 \cdot 45$, $3 \cdot 15$ und $5 \cdot 9$. Die entsprechenden Kandidatensummen sind 46, 18 und 14. Von den um eins verminderten Werten 45, 17 und 13 ist in der Tat nur 45 nicht prim.

20 Riesige Potenzen

Autorin/Autor: Tom Verhoeff (TU Eindhoven)

Lösung

Die richtige Antwortmöglichkeit ist:

3 102229

Erläuterung:

Im Prinzip kann man ein Computerprogramm zum Lösen der Aufgabe schreiben, aber auch dann muß wegen der Größe der Zahl 10^{10} die Effektivität des Algorithmus beachtet werden.
Eine einfache Lösung basiert auf einer rekursiven Beziehung für die Zahlen $T(N,m)$, wobei $T(N,m)$ die Anzahl der Potenzen größer als 1 und nicht größer als N mit maximalem Exponenten m ist.
Beispielsweise kann die Zahl 16 auf verschiedene Weisen als Potenz geschrieben werden: $16 = 2^4 = 4^2 = 16^1$; der maximale Exponent für 16 ist also 4. Für Zahlen, die sich nicht als echte Potenzen schreiben lassen, ist der maximale Exponent gleich 1.
Beispielsweise is also

$$\begin{aligned}
T(16,4) &= 1 \quad \text{mit } 16 = 2^4, \\
T(16,3) &= 1 \quad \text{mit } 8 = 2^3, \\
T(16,2) &= 2 \quad \text{mit } 4 = 2^2,\ 9 = 2^3, \\
T(16,1) &= 11 \quad \text{mit } 2,3,5,6,7,10,11,12,13,14,15
\end{aligned}$$

Offenbar ist (bei festem N) $T(N,m) = 0$ für m hinreichend groß. Es gilt

$$\begin{aligned}
T(N,1) &= N - 1 - \sum_{i \geq 2} T(N,i), \\
T(N,m) &= T(\lfloor \sqrt[m]{N} \rfloor, 1),
\end{aligned}$$

wobei $\lfloor \sqrt[m]{N} \rfloor$ die größte natürliche Zahl $\leq \sqrt[m]{N}$ ist. Mit Computereinsatz (z.B. Mathematica) ist es nun einfach, $N - 1 - T(N,1)$ für $N = 10^{10} - 1$ zu berechnen. Allerdings ist eine Berechnung "von Hand" recht mühsam.

Für einen etwas anderen Zugang betrachten wir $U(N,m)$, die Zahl der Potenzen zwischen 1 und $N+1$, deren maximaler Exponent durch m teilbar ist. Es ist also z.B.

$$\begin{aligned} U(16,1) &= 15, \\ U(16,2) &= 3 \quad (\text{mit } 2^2,\, 3^2,\, 4^2), \\ U(16,3) &= 3 \quad (\text{mit } 2^3), \\ U(16,4) &= 1 \quad (\text{mit } 2^4) \end{aligned}$$

Hier gilt

$$\begin{aligned} U(N,1) &= N-1, \\ U(N,m) &= \lfloor \sqrt[m]{N} \rfloor - 1. \end{aligned}$$

Zum Zählen der echten Potenzen zwischen 1 und $N+1$ können die $U(N,m)$ für $m \geq 2$ nicht einfach addiert werden. Beispielsweise enthalten die durch $U(16,2)$ und $U(16,4)$ gezählten Mengen beide die Potenz $16 = 2^4 = 4^2$.
Es gilt stattdessen ein erweitertes "Prinzip von Inklusion und Exklusion". Sei $a > 1$. Die Potenz $a^m \leq N$ kommt in genau den Mengen vor, die durch $U(N,t)$ gezählt werden, falls t ein Teiler von m ist. Folglich gilt

$$\sum_{m \geq 2} T(N,m) = \sum_{i \geq 2} f(i) U(N,i),$$

sofern f eine Funktion mit der Eigenschaft

$$\sum_{t|m,\, t>1} f(t) = 1$$

für alle $m \geq 2$ ist. Tatsächlich hat die Funktion

$$f(i) = \begin{cases} (-1)^{\nu(i)-1} & i \text{ quadratfrei, } \nu(i) \text{ Anzahl der Primfaktoren von } i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

diese Eigenschaft.
Für $N = 10^{10} - 1$ ist $U(N,m) = 0$ für $m \geq 34$. Die zur Berechnung der Lösung erforderlichen Zahlen sind der folgenden Tabelle zu entnehmen. Sie

lassen sich mit einem Taschenrechner berechnen.

i	$f(i)$	$U(N,i)$
2	1	9998
3	1	2153
4	0	
5	1	98
6	-1	45
7	1	25
8	0	
9	0	
10	-1	8
11	1	7
12	0	
13	1	4
14	-1	4
15	-1	3
16	0	
17	1	2
18	0	
19	1	2
20	0	
21	-1	1
22	-1	1
23	1	1
24	0	
25	0	
26	-1	1
27	0	
28	0	
29	1	1
30	1	1
31	1	1
32	0	
33	-1	1

Addition mit den entsprechenden Vorfaktoren liefert die Lösung.

21 Wasserfass

Autor: Hennie ter Morsche (TU Eindhoven; h.g.termorsche@tue.nl)

Lösung

Die richtige Antwortmöglichkeit ist:

7 Zwischen 18 **und** 21 **cm**

Erläuterung:

Im Folgenden geben wir alle Längen und Höhen in Zentimetern (cm) und alle Massen in Gramm (g) an. Zur besseren Lesbarkeit setzen wir $A = 22000$ und $B = 40^2\pi$. Der Schwerpunkt des leeren Fasses befindet sich im Zentrum des Fasses und liegt auf Höhe 60 über dem Boden; die Masse des leeren Fasses ist A. Wenn die Höhe des Wassers im Fass x beträgt, so liegt der Schwerpunkt der Wassermenge auf Höhe $x/2$; die Gesamtmasse der Wassermenge beträgt Bx. Der gemeinsame Schwerpunkt von Fass und Wasser liegt dann auf Höhe

$$H(x) \ := \ \left(60A + \frac{x}{2}Bx\right) \ / \ (A + Bx)\,,$$

wobei der Definitionsbereich der Funktion H ein Teilinterval von $(0, 120)$ ist. Also ist die Funktion H auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar (und somit auch stetig). Die erste Ableitung der Funktion H lautet

$$H'(x) \ = \ \frac{B}{(A + Bx)^2}\left(\frac{1}{2}Bx^2 + Ax - 60A\right).$$

Wir bestimmen die Nullstellen von H'. Diese sind nach dem notwendigen Kriterium für die Existenz lokaler Extremstellen die einzigen Kandidaten für lokale Extremstellen der Ausgangsfunktion H. Unter Anwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man die beiden einzigen Lösungen $x \approx -27,708$ und $x \approx 18,955$. Der negative Wert $-27,708$ gehört nicht zum Definitionsbereich von H.
Wir untersuchen nun den Vorzeichenwechsel von H' bei der positiven Nullstelle. Der erste Term von H' ist stets positiv, der zweite Term beschreibt eine nach oben geöffnete Parabel, die bei der positiven Nullstelle einen Vorzeichenwechsel von minus nach plus hat. D.h., die positive Nullstelle ist (nach

einem hinreichenden Kriterium) tatsächlich eine lokale Minimumstelle. Nun muss noch untersucht werden, ob an der gefundenen lokalen Minimumstelle auch das gesuchte globale Minimum angenommen wird.
H ist auf ihrem Definitionsbereich eine differenzierbare (und damit auch stetige) Funktion, und sie besitzt dort genau eine lokale Minimumstelle (die lokale Maximumstelle liegt ja außerhalb des Definitionsbereiches). Daraus folgt, dass an dieser lokalen Minimumstelle gleichzeitig auch das gesuchte globale Minimum angenommen wird.
D.h., für $x \approx 18;955$ ist der Abstand des Schwerpunktes des Fasses vom Boden minimal.

22 Tiefschnee

Autor: Georg Prokert (TU Eindhoven; g.prokert@tue.nl)

Lösung

Die richtigen Antwortmöglichkeiten sind:

3 3 und

6 6

Erläuterung:

Für die Lösung müssen wir uns nur an zwei einfache Fakten aus der Dreiecksgeometrie erinnern. Erstens: In jedem Dreieck beträgt die Winkelsumme 180 Grad. Zweitens: Sind in einem Dreieck ABC die beiden Seiten AB und AC gleich lang, so sind die beiden Winkel bei B und C gleich groß (ein derartiges Dreieck wird gleichschenklig genannt).
Wir wollen für das Folgende vereinbaren, dass wir in einem Dreieck ABC sowohl mit $\angle BAC$ als auch mit $\angle CAB$ jeweils den **Innenwinkel** des Dreiecks im Punkt A meinen.
Und jetzt gehen wir auf die Jagd nach vielen Winkeln in vielen gleichschenkligen Dreiecken. Sei x der gesuchte Winkel $\angle KAC$.

- Das Dreieck AKC ist gleichschenklig.
  Daher gilt $\angle KCA = \angle KAC = x$ und $\angle CKA = 180 - 2x$.

- Die beiden Winkel $\angle CKA$ und $\angle CKI$ bei K addieren sich zu 180Grad auf.
  Daher gilt $\angle CKI = 180 - \angle CKA = 2x$.

- Das Dreieck KCI ist gleichschenklig.
  Daher gilt $\angle CKI = \angle CIK = 2x$ und $\angle KCI = 180 - 4x$.

- Die drei Winkel $\angle KCA$, $\angle KCI$ und $\angle ICE$ bei C addieren sich zu 180 Grad auf.
  Daher gilt $\angle ICE = 180 - \angle KCA - \angle KCI = 3x$.

- Das Dreieck CEI ist gleichschenklig.
  Daher gilt $\angle IEC = \angle ICE = 3x$ und $\angle CIE = 180 - 6x$.

- Die drei Winkel $\angle CIK$, $\angle CIE$ und $\angle EIG$ bei I addieren sich zu 180 Grad auf.
  Daher gilt $\angle EIG = 180 - \angle CIK - \angle CIE = 4x$.

- Das Dreieck IEG ist gleichschenklig.
  Daher gilt $\angle EIG = \angle EGI = 4x$ und $\angle IEG = 180 - 8x$.

- Die drei Winkel $\angle IEC$, $\angle IEG$ und $\angle GEF$ bei E addieren sich zu 180 Grad auf.
  Daher gilt $\angle GEF = 180 - \angle IEC - \angle IEG = 5x$.

- Das Dreieck EFG ist gleichschenklig.
  Daher gilt $\angle GFE = \angle GEF = 5x$.

Analog zeigen wir $\angle BJA = \angle BAJ = x$ und $\angle JBA = 180° - 2x \ldots$ und schließlich $\angle HGF = \angle GFE = 5x$. Damit hat das dreieckige Schneefeld beim Punkt A den Winkel x und bei den Punkten F und G jeweils den Winkel $5x$. Folglich gilt $x + 5x + 5x = 180$ und $x = 180/11 \approx 16,363636$. Antwort #3 ist demnach richtig.
Da, mit der sonst üblichen Notation von Winkeln im mathematisch positiven Drehsinn, unter $\angle KAB$ der **Außenwinkel** des Dreiecks ABK verstanden wird, haben wir auch die erste Nachkommastelle dieses Winkels als richtige Antwort zugelassen. Es gilt $360 - x \approx 343,636363$, also ist auch Antwort #6 richtig.

23 Mützen und Zahlen

Autoren:
Aart Blokhuis (TU Eindhoven; A.Blokhuis@tue.nl)
Gerhard Woeginger (TU Eindhoven; gwoegi@win.tue.nl)

Lösung

Die richtige Antwortmöglichkeit ist:

10 Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 24/24.

Erläuterung:

Die vier Intelligenzwichtel können das Spiel immer gewinnen. Wir beschreiben eine mögliche Gewinnstrategie, die mit der folgenden Tabelle arbeitet. Die Wichtel müssen sie nur auswendig lernen. Die Tabelle enthält alle 24 Permutationen der Buchstaben A, B, C, D, und zwar 12 Permutationen in der linken Hälfte und 12 Permutationen in der rechten Hälfte.

ABCD	BADC	CABD	DACB	ABDC	BACD	CADB	DABC
ACDB	BCAD	CBDA	DBAC	ACBD	BCDA	CBAD	DBCA
ADBC	BDCA	CDAB	DCBA	ADCB	BDAC	CDBA	DCAB

Diese Tabelle hat die folgende wichtige Eigenschaft: Wenn man in einer Permutation in der linken Hälfte (zum Beispiel in DCBA) genau zwei Buchstaben vertauscht (zum Beispiel die zwei Buchstaben D und B), so steht die resultierende Permutation (in unserem Fall BCDA) immer in der rechten Hälfte. Und wenn man in einer Permutation in der rechten Hälfte zwei Buchstaben vertauscht, so steht das Ergebnis immer in der linken Hälfte. (Die Mathematiker sagen auch: Die linken Permutationen haben *gerade* Parität, und die rechten Permutationen haben *ungerade* Parität.)
Hier ist die Strategie: Jeder Wichtel nimmt an, dass seine eigene Zahl die kleinste der vier Zahlen ist. Unter dieser Annahme ordnet er die vier Wichtel nach ansteigendem Zahlenwert (Atto=A, Bilbo=B, Chico=C, Dondo=D). Wenn die resultierende Permutation in der linken (rechten) Hälfte der Tabelle steht, so hebt er die linke (rechte) Hand. Und das ist bereits die gesamte Strategie. Warum funktioniert sie? Nehmen wir an, dass die Anordnung der vier Wichtel nach ansteigendem Zahlenwert gleich $UXYZ$ ist.

- Der Wichtel U mit der kleinsten Zahl verwendet die Permutation $UXYZ$.
- Der Wichtel X mit der zweitkleinsten Zahl verwendet die Permutation $XUYZ$.
- Der Wichtel Y mit der drittkleinsten Zahl verwendet die Permutation $YUXZ$.
- Der Wichtel Z mit der größten Zahl verwendet die Permutation $ZUXY$.

Die zweite Permutation $XUYZ$ entsteht aus der ersten Permutation $UXYZ$ durch das Vertauschen von U und X. Die dritte Permutation $YUXZ$ entsteht aus der zweiten Permutation durch das Vertauschen von X und Y. Und die vierte Permutation $ZUXY$ entsteht aus der dritten Permutation durch das Vertauschen von Y und Z. Wenn U die rechte (linke) Hand hebt, so hebt X die linke (rechte), Y die rechte (linke) und Z die linke (rechte) Hand. Das Spiel wird also auf jeden Fall gewonnen.

24 Die ω-Strahlung

Autoren: Raman Sanyal (FU Berlin), Moritz Schmitt (FU Berlin)

Lösung

Die richtige Antwortmöglichkeit ist:

5 $(650, 750)$, $(761.23, 708.94)$, $(884.41, 611.46)$, $(950, 700)$, $(513.1, 610.58)$

Erläuterung:

Da die ω-Strahlung eines Kindes K_i $(i = 1, \ldots, 5)$ proportional zum Kehrwehrt des Abstandes von K_i und dem Wichtel auf der Dreiecksseite ist, ist sie genau dann maximal, wenn der Abstand am kleinsten ist. Der Abstand von einem Kind zu einem Punkt auf der Dreiecksseite ist dabei minimal, wenn die Gerade durch diesen Punkt und das Kind senkrecht auf die Dreiecksseite steht. Wir bestimmen also die Position der Kinder, indem wir Geraden durch die Punkte a_i, b_i beziehungsweise c_i $(i = 1, \ldots, 5)$ ziehen, welche senkrecht zur jeweiligen Dreiecksseite stehen. Die Schnittpunkte von je drei Geraden sind dann mögliche Aufenthaltsorte der Kinder (siehe Abbildung 1).
An Schnittpunkten der Senkrechten durch c_1, c_2, c_4 und c_5 ist jeweils die Position der Strahlungsquelle offensichtlich, bei der Senkrechten durch c_3 scheinen zwei Schnittpunkte mit den Senkrechten auf die anderen Dreiecksseiten in Frage zu kommen. Da aber nur noch die Senkrechten durch a_3 und b_3 offen sind (siehe Abbildung 1), ist auch diese letzte Position des Kindes eindeutig bestimmt. Durch Ausmessen oder mit Hilfe eines Computeralgebrasystems (oder – mit ungleich mehr Aufwand – per Hand) kann man nun einfach die Koordinaten der Schnittpunkte berechnen und kommt auf

$$(650, 750), (761.23, 708.94), (884.41, 611.46), (950, 700), (513.1, 610.58).$$

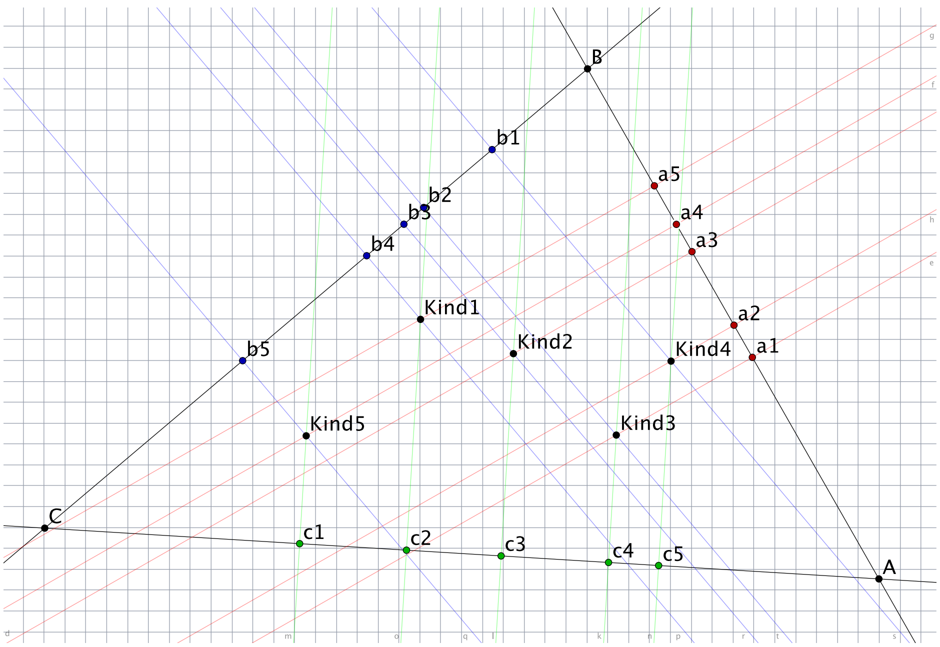


Abbildung 1: Position der Kinder