Rudolphs Schlitten

Autor: Jochen Ricker

Aufgabe

Endlich ist es wieder soweit: Weihnachten steht vor der Tür! Diesmal hat der Weihnachtsmann sich ein ganz besonderes Geschenk für seine Rentiere einfallen lassen. Sie bekommen einen nagelneuen Schlitten, der dank extraglatter Kufen noch leichter durch den Schnee gleitet. Er ist mit einem Tachometer ausgerüstet, damit der Kutscher immer abschätzen kann, wie lange er unterwegs sein wird.

Da noch ein paar Tage bis Heiligabend vergehen werden und der Weihnachtsmann in Bezug auf sein Geschenk sehr unsicher ist, soll die Qualität des Schlittens erst noch bei einer Probefahrt auf dem Werksgelände der Wichtelwerkstatt getestet werden. Um gleichzeitig die Überraschung möglichst lange aufrecht zu erhalten, wird nur Rudolph, das rotnäsige Rentier, in die Pläne des Weihnachtsmanns eingeweiht. Es wird eine Strecke von genau 20 km abgesteckt, die Rudolph den Schlitten ziehen muss.

Während der Tour fällt dem Weihnachtsmann auf, dass der Wert von Rudolphs Geschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ immer genau dem Dreifachen des Abstandes von Rudolph zum Zielpunkt in Kilometern entspricht.

Nun möchte der Weihnachtsmann wissen, wie viele Kilometer Rudolph nach einer halben Stunde zurückgelegt hat. Exakt kann er die Länge der Strecke nicht bestimmen, aber er überlegt sich eine Methode, wie er sie annähern kann. Innerhalb einer jeden Minute ändert Rudolph seine Geschwindigkeit

nur wenig, deshalb teilt der Weihnachtsmann die halbe Stunde in 30 Intervalle. Zu **Beginn** eines jeden Intervalls berechnet er stolz die Geschwindigkeit und nimmt an, dass sie in diesem Intervall konstant ist.
Am Startpunkt hat Rudolph die Geschwindigkeit $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.Würde er eine Minute mit dieser Geschwindigkeit laufen, hätte er genau einen Kilometer zurückgelegt.
Seine Geschwindigkeit für die zweite Minute betrüge dann $57\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Innerhalb der ersten zwei Minuten hat Rudolph den Schlitten also $1{,}950\,\text{km}$ gezogen.
Wie lang ist nach den Berechnungen des Weihnachtsmanns die Strecke, die Rudolph in der ersten halben Stunde den Schlitten zieht? Gib die Länge auf ganze Meter genau gerundet an.

Antwortmöglichkeiten

1. $7,854$ km
2. $15,707$ km
3. $23,561$ km
4. $4,924$ km
5. $9,848$ km
6. $14,772$ km
7. $1,547$ km
8. $3,094$ km
9. $4,641$ km
10. $20,000$ km

Lösung

Sei u_m die Strecke (in Kilometern), die Rudolph nach m Minuten zurückgelegt hat. Die Länge der Strecke, die Rudolph den Schlitten in der $(m+1)$-ten Minute zieht, beträgt dann $u_{m+1} - u_m$. Da der Weihnachtsmann annimmt, dass die Geschwindigkeit, innerhalb dieser Minute ($\frac{1}{60}$ h) konstant ist und dass die Geschwindigkeit zu Beginn jeder Minute feststeht, ergibt sich folgende Gleichung:

$$\frac{u_{m+1} - u_m}{\frac{1}{60}} = 3 \cdot (20 - u_m)$$

Stellen wir die Gleichung nach u_{m+1} um, so erhalten wir diese Rekursion:

$$u_{m+1} = \frac{19}{20} u_m + 1$$

Sei nun $y_m = u_m - 20$, so können wir u_m durch $y_m + 20$ und u_{m+1} durch $y_{m+1} + 20$ ersetzen.

$$\begin{aligned} y_{m+1} + 20 &= \frac{19}{20} \cdot y_m + \frac{19}{20} \cdot 20 + 1 \\ y_{m+1} &= \frac{19}{20} y_m \end{aligned}$$

$(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ist eine geometrische Folge mit dem Anfangswert $y_0 = -20$, somit lässt sich y_m explizit berechnen:

$$y_m = (-20) \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^m$$

Somit errechnet der Weihnachtsmann eine Strecke mit einer Länge von

$$u_{30} = y_{30} + 20 = 20 \cdot \left(1 - \left(\frac{19}{20}\right)^{30}\right)$$

$$u_{30} \approx 15,707$$

Rudolph, das Rentier mit der roten Nase, legt also nach 30 Minuten eine Strecke von $15,707 km$ zurück.

Projektbezug

Bei der Aufgabe handelt es sich um ein numerisches Problem. Der Weihnachtsmann versucht eine Differentialgleichung zu lösen, deren exakte Lösung er nicht analytisch ermitteln kann. Differentialgleichungen sind Gleichungen, die eine Funktion y und deren Ableitung y' enthalten.

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

In unserem Fall enthält die Gleichung den Weg y als Funktion der Zeit und die Geschwindigkeit y' als Ableitung des Weges nach der Zeit. Statt einer einzelnen Zahl wird die Funktion selbst gesucht. Die Methode, die bei dieser Aufgabe angewandt wird, nennt sich das explizite Eulerverfahren. Für eine natürliche Zahl n wird das gesamte Zeitintervall in n kleinere Zeitabschnitte geteilt, dessen Anfangspunkte hier mit t_i bezeichnet werden sollen (für $0 \leq i < n$). Anschließend wird die Ableitung durch den Differenzenquotienten ersetzt. Aus der oberen Gleichung ergibt sich dann folgende Näherung:

$$\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \approx f(t_i, y(t_i))$$

Somit lässt sich ein approximativer Wert für $y(t_{i+1})$ angeben:

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)\, f(t_i, y(t_i))$$

Genau dies wird auch in der Aufgabe gemacht.